دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

مفاهیم پایه ای در مسائل کمینه سازی

«کمینه سازی تک متغیره»

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فهرست:

- ✓ مقدمه
- ✓ کمینه سازی تک متغیره بدون محدودیت
- ✓ کمینه سازی تک متغیره با محدودیت

به دنبال چه هستیم؟

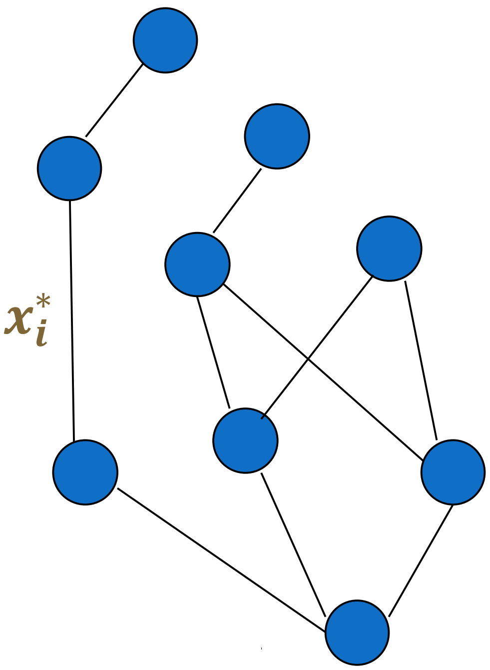
یافتن جریان در کمانها در شرایط تعادل UE

$$\boldsymbol{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

نقطه جواب کمینه جهانی

x_i^*

حجم جریان در کمان i ام در شرایط تعادل



فرم استاندارد مسئله کمینه سازی

$$Min\ z(\boldsymbol{X})$$

به طوری که:

$$g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j \quad j = 1, \dots, J$$

جواب $\boldsymbol{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$

به ازای هر بردار امکانپذیر $\boldsymbol{X}$: $z(\boldsymbol{X}^*) \leq z(\boldsymbol{X})$

$$g_j(\boldsymbol{X}^*) \geq b_j\ \forall j \in (set\ of\ constraints)$$

کمینه سازی تک متغیره بدون محدودیت

نقطه کمینه مسئله $Min\ Z(x)$ در نقطه ای است که:

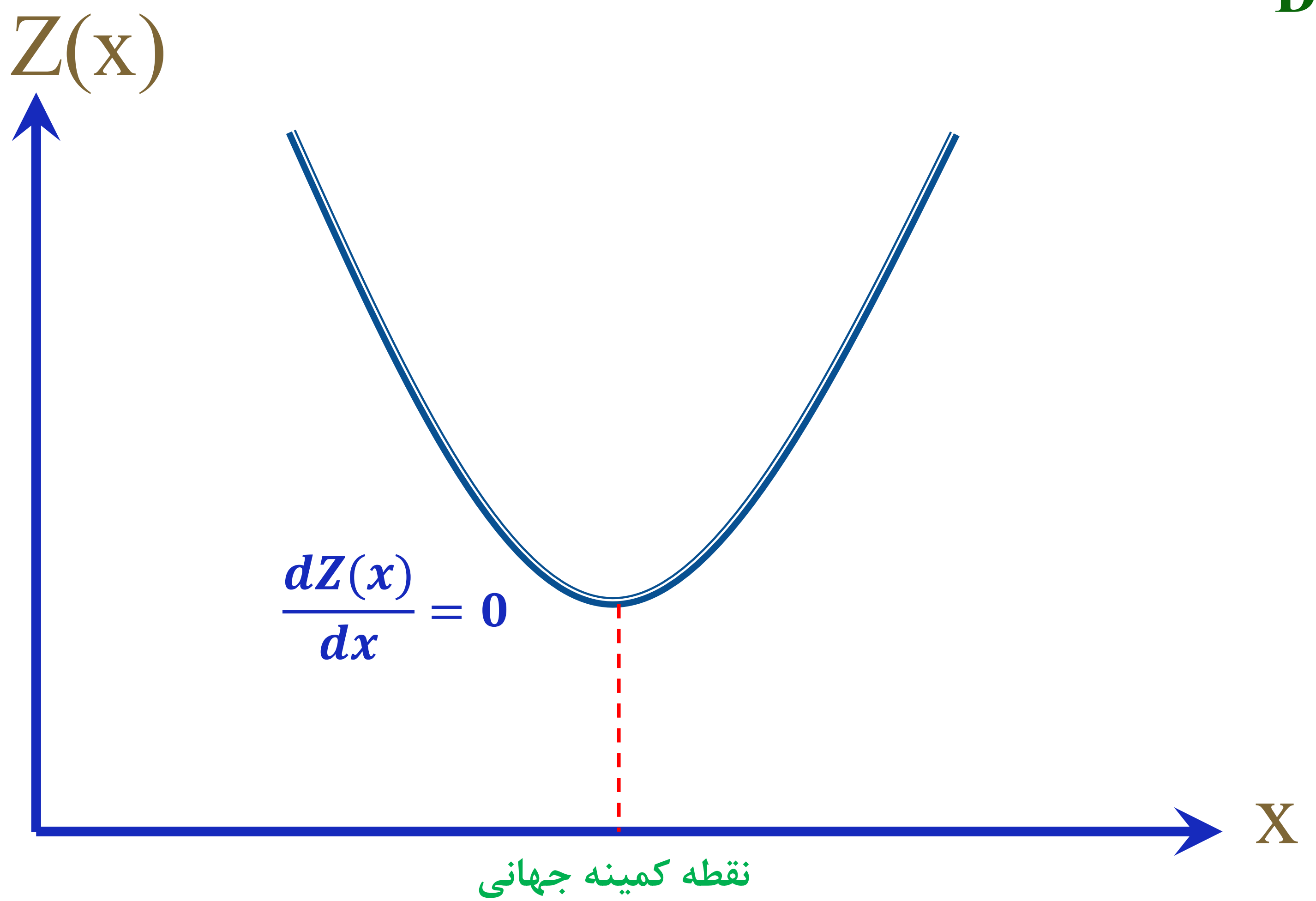
$$\frac{dZ(x)}{dx} = 0$$

نقطه با مشتق صفر = نقطه سکون (Stationary Point)

یک نقطه، نقطه کمینه مسئله $Min\ Z(x)$ باشد: **شرط لازم** مشتق صفر باشد.

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

تابع Ditonic

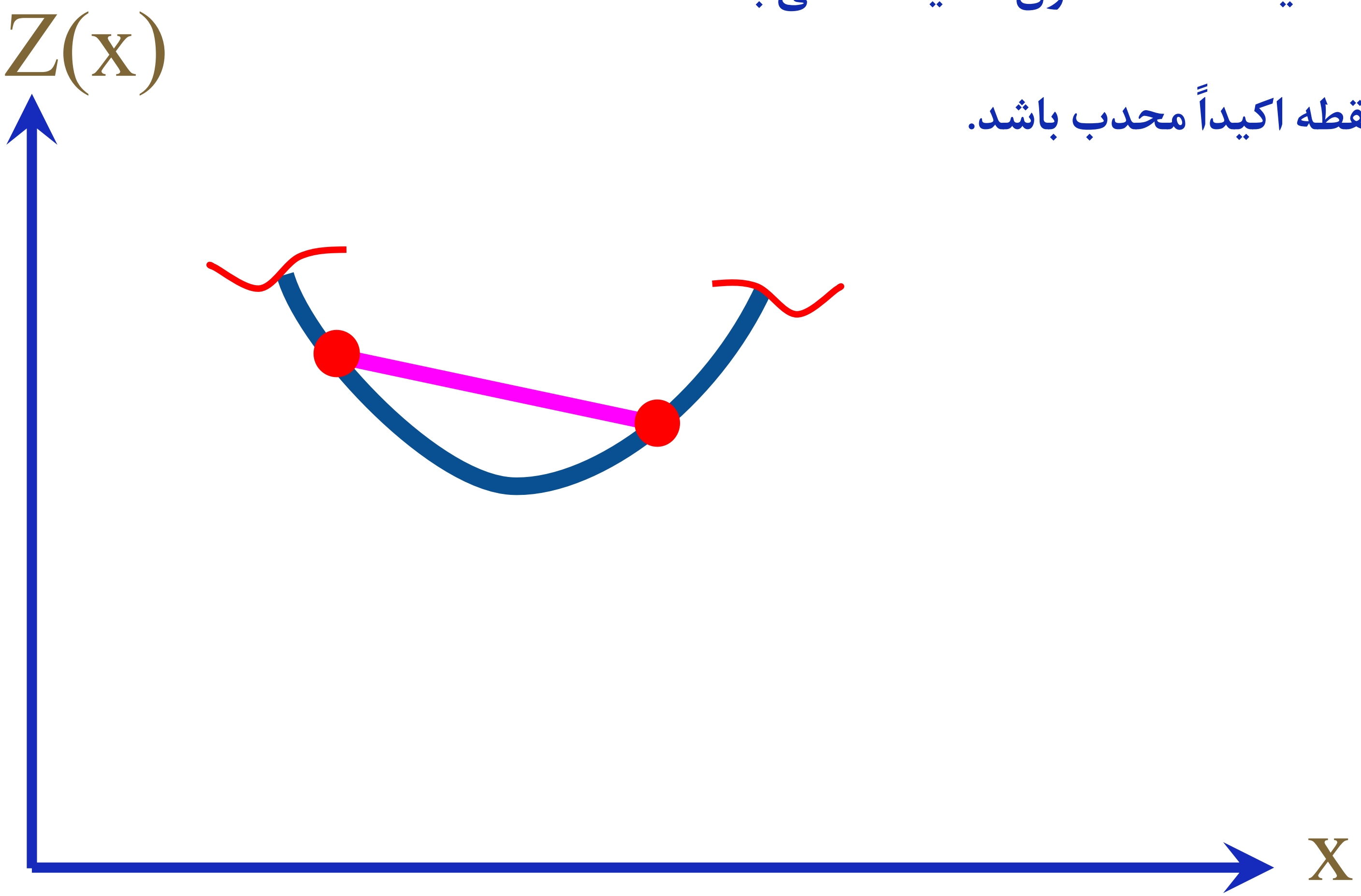


شرایط درجه اول، کافی نیست؟

کمینه ...
جهانی ...

شرط کافی برای آن که یک نقطه سکون، کمینه محلی باشد:

تابع در حوالی این نقطه اکیداً محدب باشد.

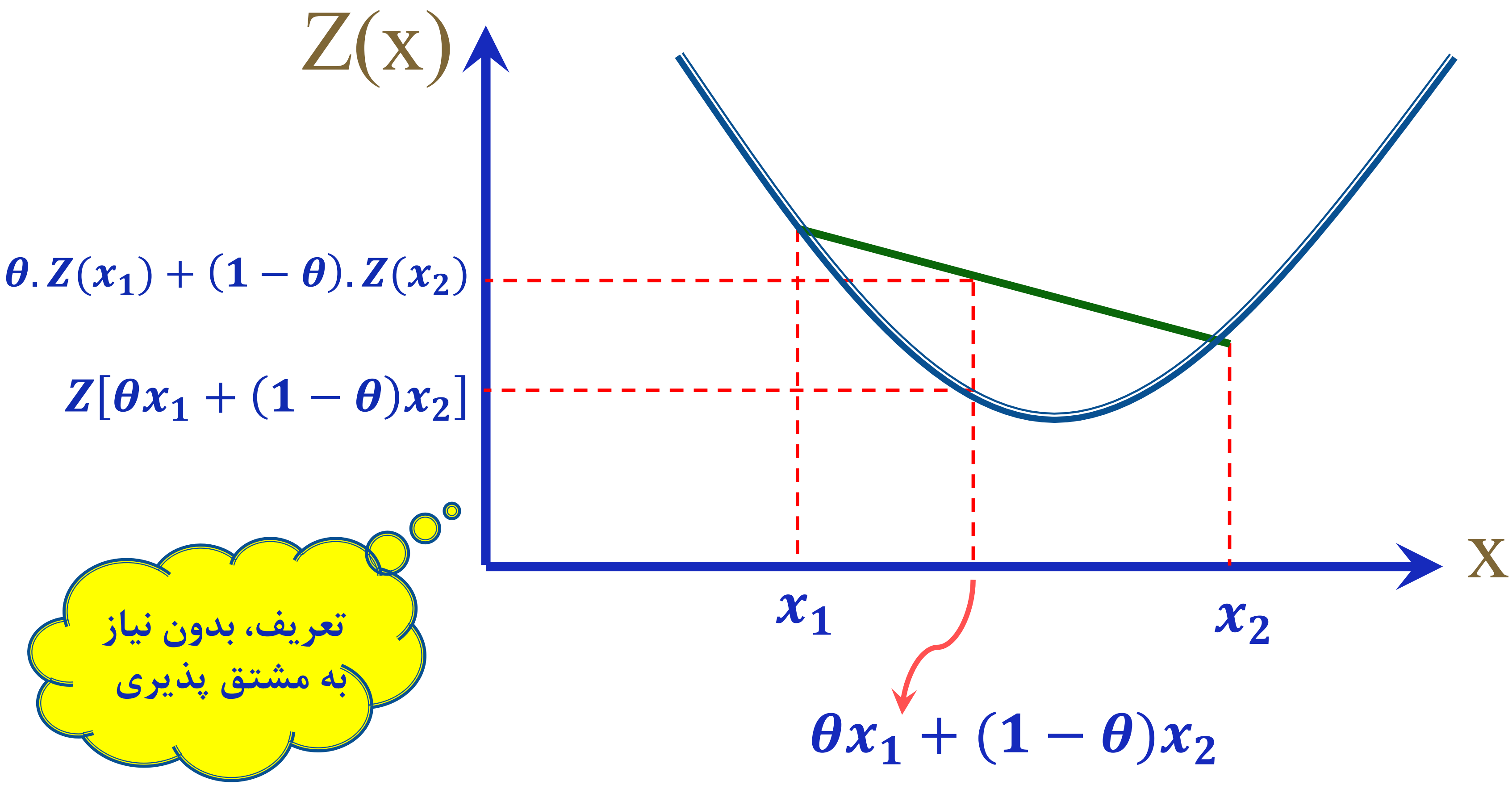


شرایط اکیداً محدب بودن یک تابع:

تعریف ۱

برای هر دو نقطه x_1 و x_2 و هر θ ($0 < \theta < 1$) تابع $Z(x)$ اکیداً محدب است اگر:

$$Z[\theta x_1 + (1-\theta)x_2] < \theta\, Z(x_1) + (1-\theta)\, Z(x_2)$$



شرایط محدب بودن یک تابع:

تعریف ۱

برای هر دو نقطه x_1 و x_2 و هر θ ($1 > \theta > 0$) تابع $Z(x)$ محدب است اگر:

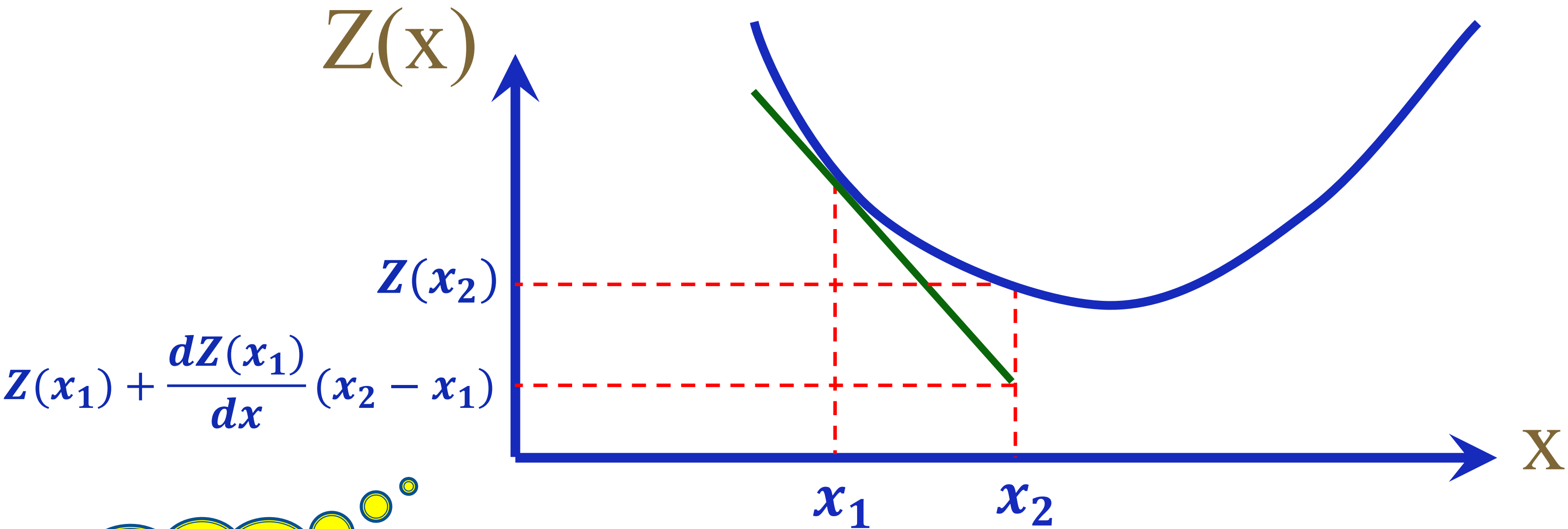
$$Z[\theta x_1 + (1-\theta)x_2] \leq \theta . Z(x_1) + (1-\theta). Z(x_2)$$

شرایط اکیداً محدب بودن یک تابع:

تعریف ۲

در نقطه x_1 تابع $Z(x)$ اکیداً محدب است اگر:

$$Z(x_1) + \frac{dZ(x_1)}{dx}(x_2 - x_1) < Z(x_2)$$



تعریف، نیاز به مشتق پذیری پیوسته

شرایط محدب بودن یک تابع:

تعریف ۲

در نقطه x_1 تابع $Z(x)$ محدب است اگر:

$$Z(x_1) + \frac{dZ(x_1)}{dx}(x_2 - x_1) < Z(x_2)$$

شرایط اکیداً محدب بودن یک تابع:

تعریف ۳

اگر تابع $Z(x)$ در اطراف نقطه سکون به طور پیوسته دو بار قابل مشتق گیری باشد، آنگاه $Z(x)$ اکیداً محدب است اگر:

$$\frac{d^2Z(x)}{dx^2} > 0$$

تعریف، نیاز به دو بار مشتق پذیری پیوسته

شرایط محدب بودن یک تابع:

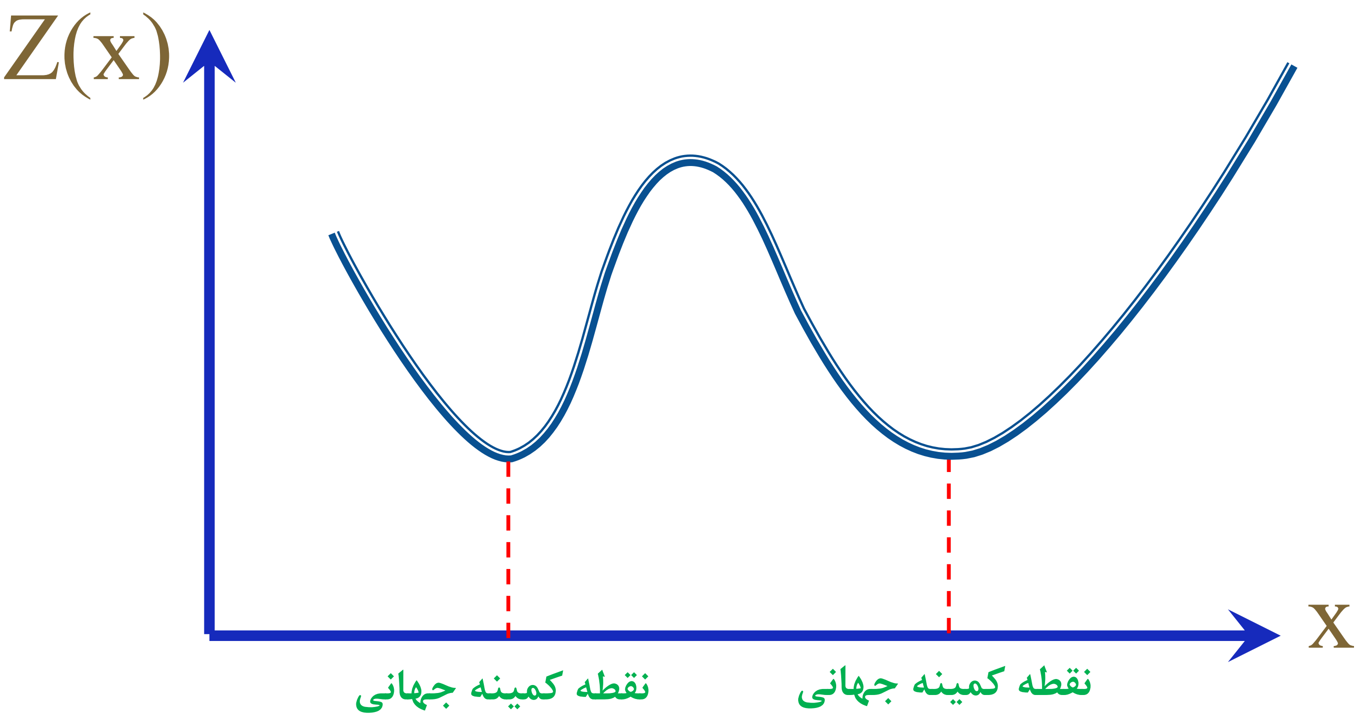
تعریف ۳

اگر تابع $Z(x)$ در اطراف نقطه سکون به طور پیوسته دو بار قابل مشتق گیری باشد، آنگاه $Z(x)$ محدب است اگر:

$$\frac{d^2Z(x)}{dx^2} \geq 0$$

تابع در نقطه کمینه جهانی، اکیداً محدب است.

آیا می توان گفت، نقطه کمینه جهانی یگانه است؟

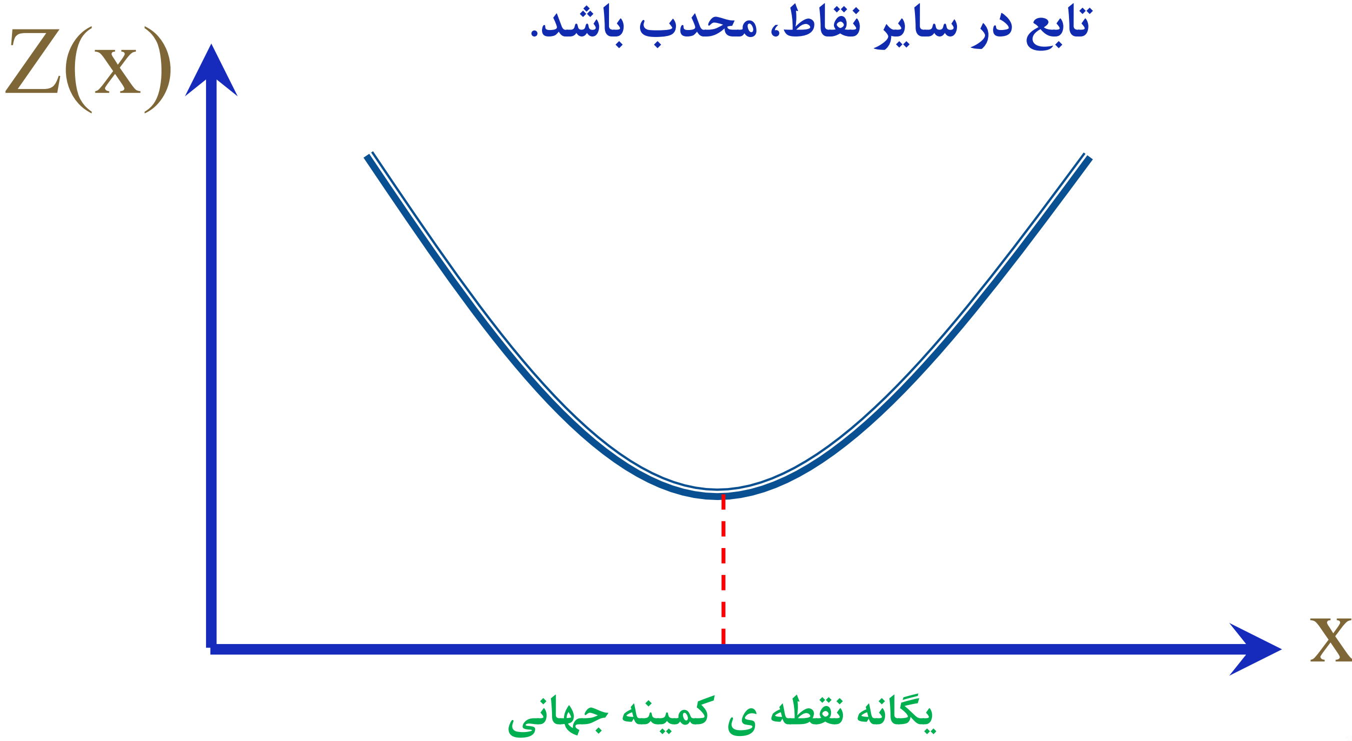


شرط کافی برای اینکه نشان دهیم نقطه x در یک تابع، یگانه نقطه ی کمینه جهانی است؟

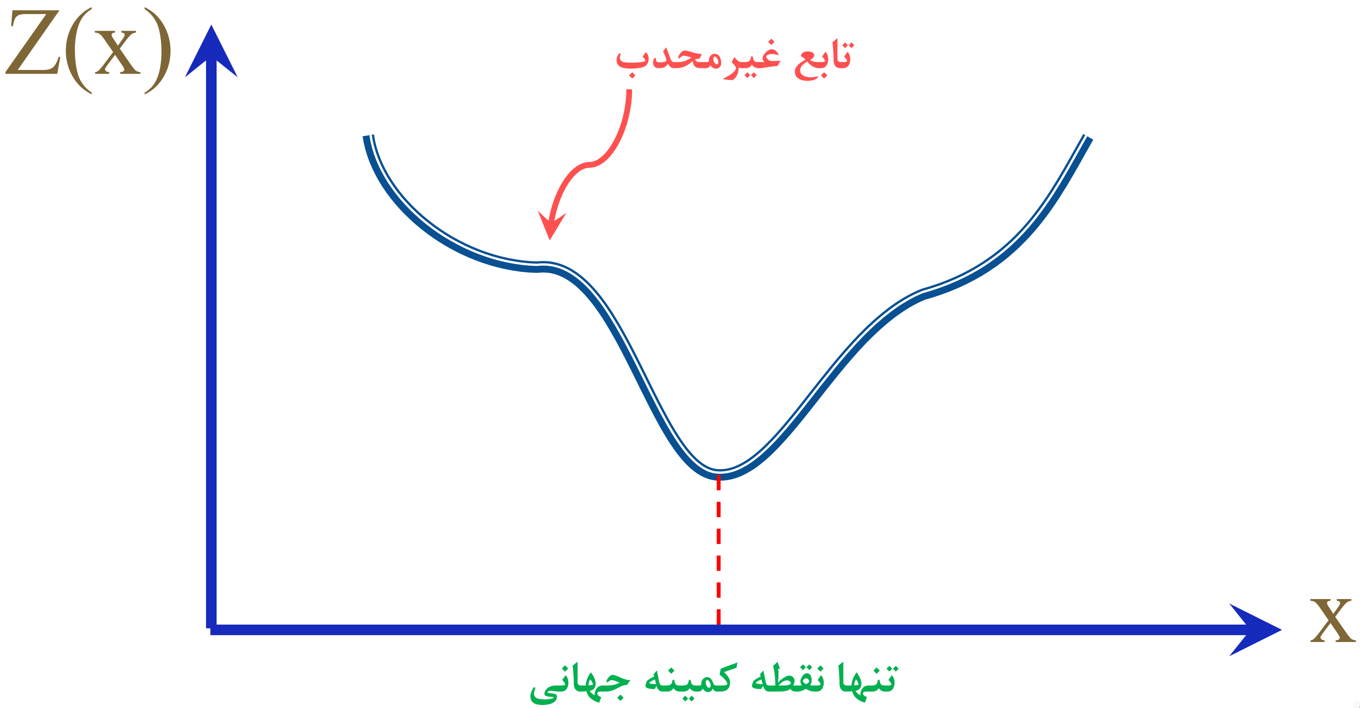
تابع در حوالی نقطه x اکیداً محدب باشد

+

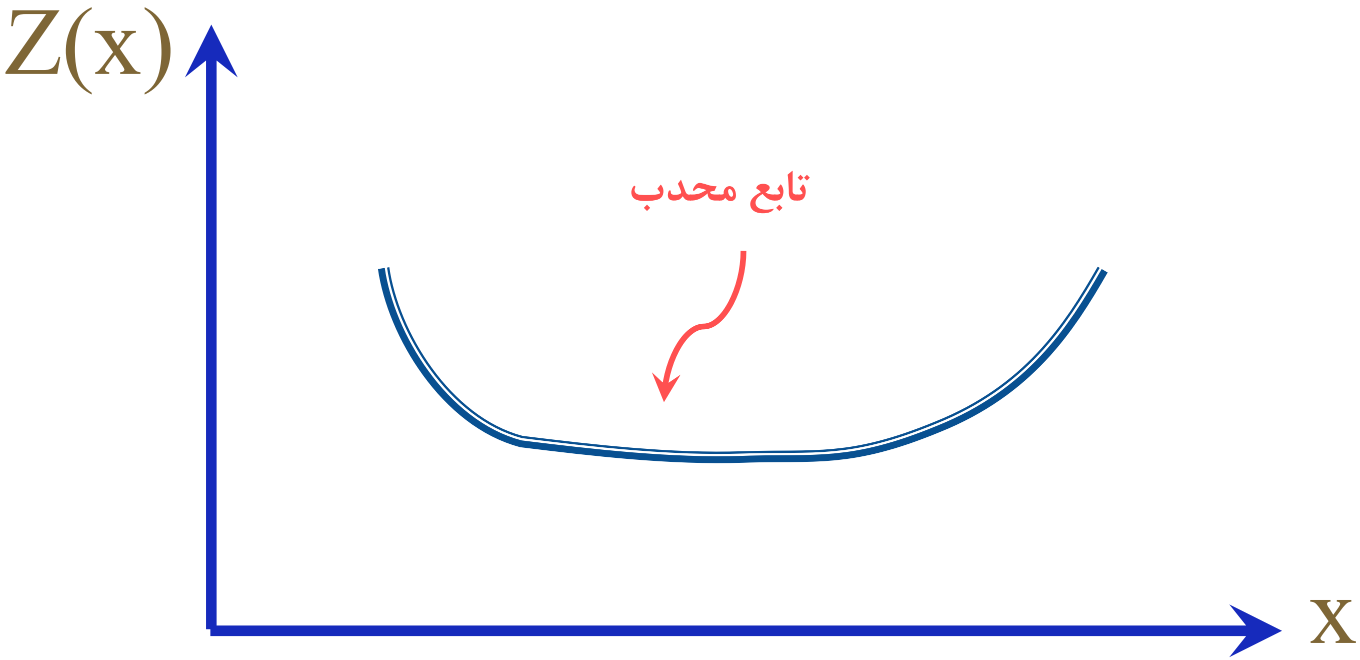
تابع در سایر نقاط، محدب باشد.



سوال: اگر تابعی تنها یک نقطه کمینه جهانی داشته باشد، حتماً محدب است؟



سوال: اگر تابع در همه نقاط محدب (نه اکیداً محدب) باشد، می توان گفت حتماً تنها یک نقطه کمینه جهانی دارد؟



دارای تعداد نامحدود نقطه کمینه جهانی

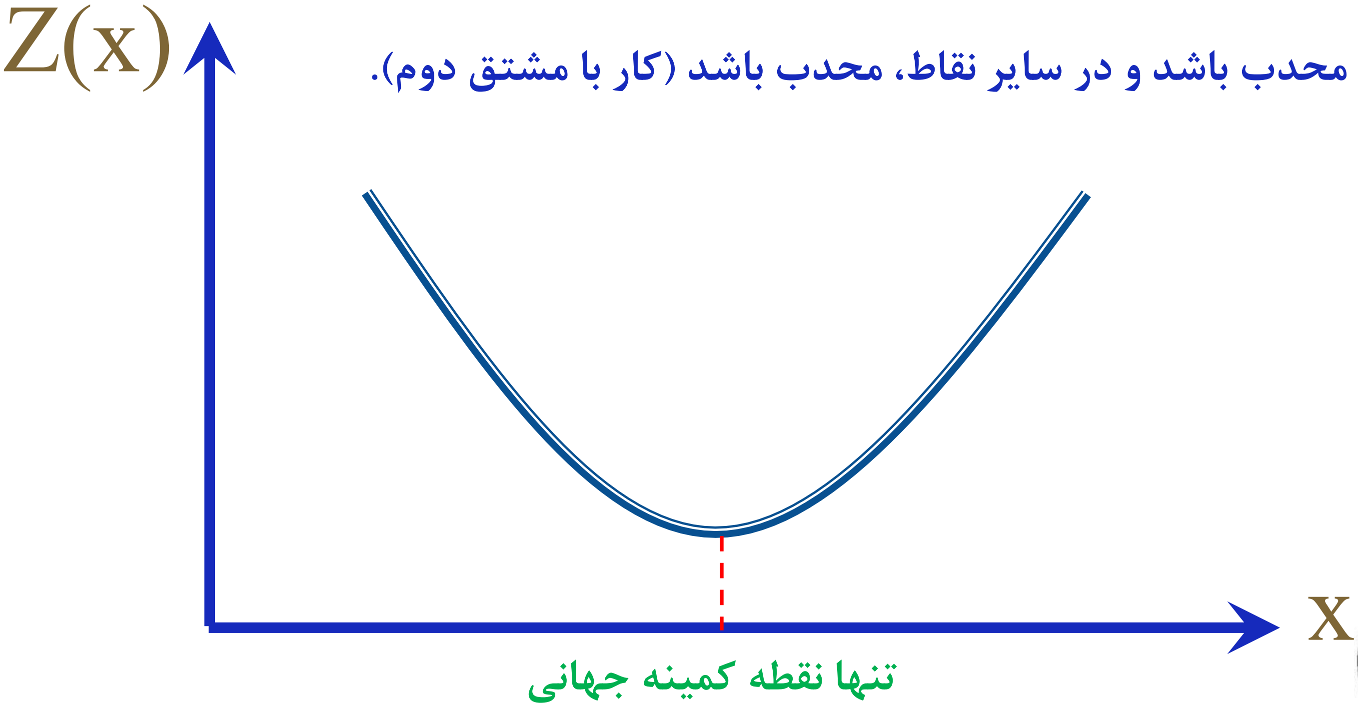
یافتن x^* به عنوان یگانه نقطه کمینه جهانی تابع $Z(x)$:

- ✓ شرایط درجه اول بهینگی (شرط لازم) ***First Order Cond.***

مشتق تابع در x^* برابر صفر باشد (کار با مشتق اول).

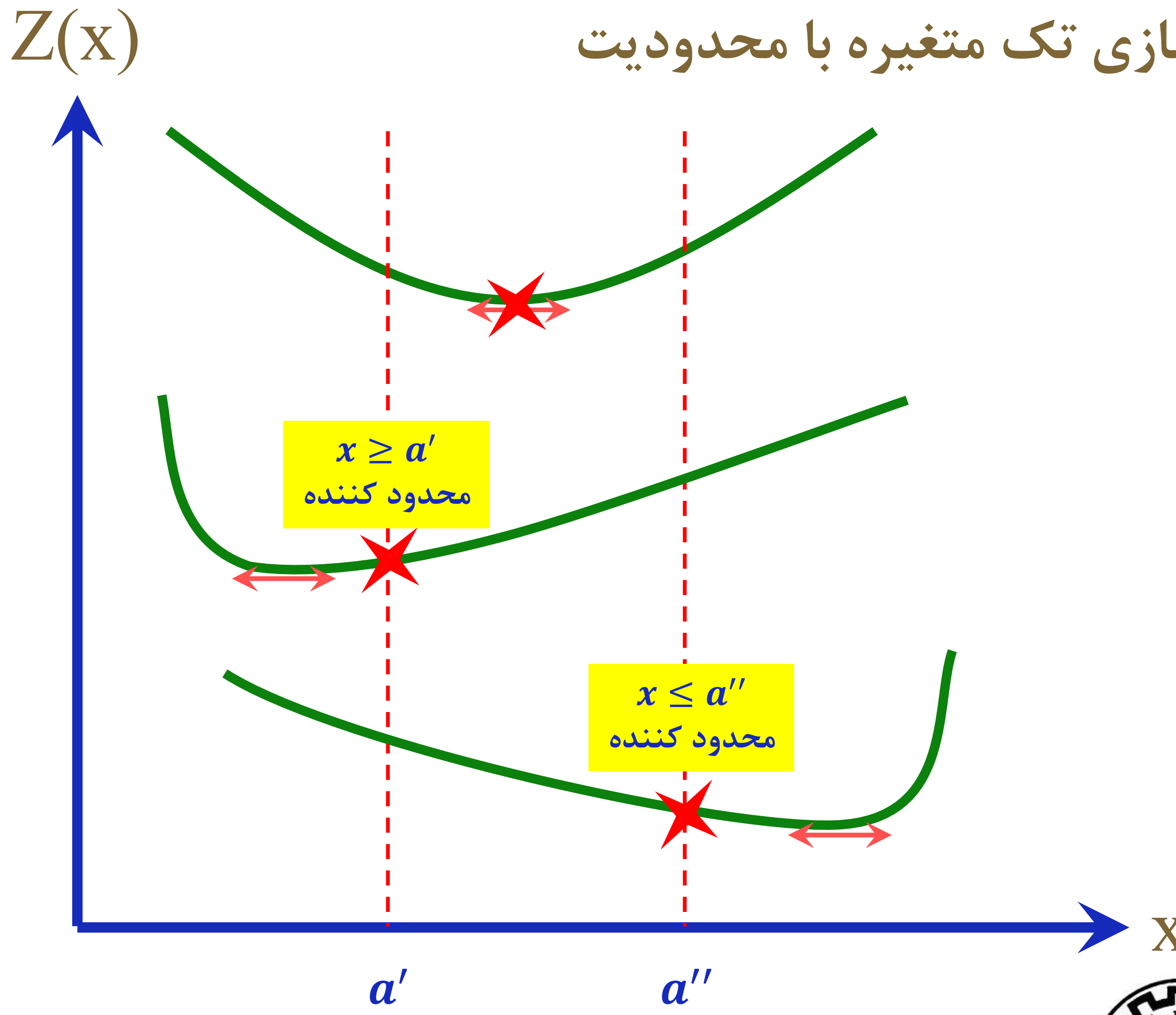
- ✓ شرایط درجه دوم بهینگی (شرط کافی) ***Second Order Cond.***

تابع در x^* اکیداً محدب باشد و در سایر نقاط، محدب باشد (کار با مشتق دوم).



کمینه سازی تک متغیره با محدودیت

$$Min\ z(x)$$
$$s.t.$$
$$x \geq a'$$
$$x \leq a''$$



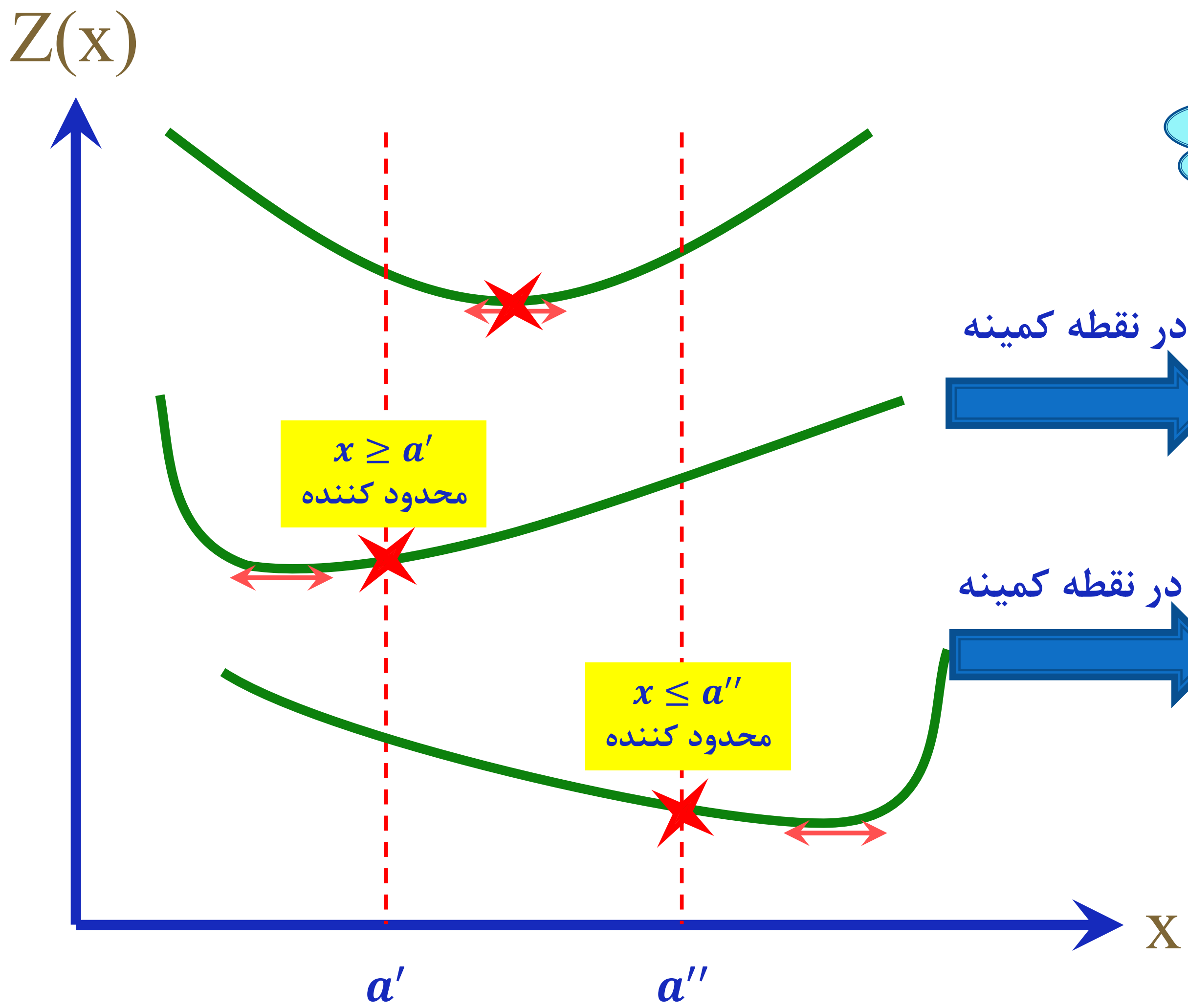
نمایش استاندارد محدودیت: $g_j(x) \geq b_j$

$$Min\ Z(x)$$
$$s.t.$$
$$x \geq a'$$
$$-x \geq -a''$$

$$g_1(x) = x \geq a'$$
$$g_2(x) = -x \geq -a''$$

اگر $g_j(x) \geq b_j$ محدودکننده باشد: $\frac{dg_j(x^*)}{dx}$ و $\frac{dZ(x^*)}{dx}$ هر دو دارای یک علامت هستند.

کمینه سازی تک متغیره با محدودیت



«هم علامتی»
در نقطه کمینه

در نقطه کمینه

$$\frac{dg_1(x^*)}{dx} > 0 \, , \frac{dZ(x^*)}{dx} > 0$$

در نقطه کمینه

$$\frac{dg_1(x^*)}{dx} < 0 \, , \frac{dZ(x^*)}{dx} < 0$$

می توان «هم علامتی» در نقطه کمینه را اینگونه نوشت:

در نقطه کمینه

$$\frac{dZ(x^*)}{dx} = u_j \frac{dg_j(x^*)}{dx} \quad j = 1,2 \qquad u_j \geq 0$$

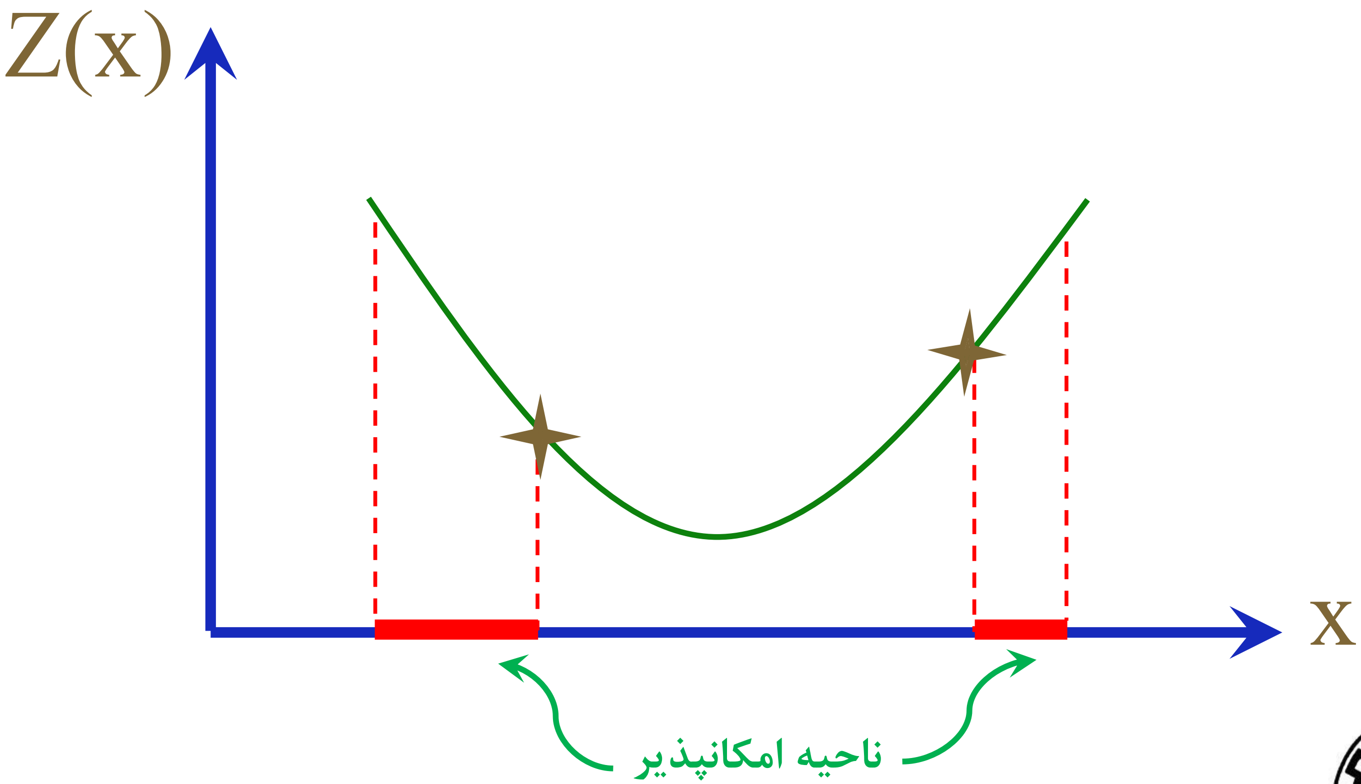
در نقطه کمینه

$$\begin{cases} \dfrac{dZ(x^*)}{dx} = \sum_j u_j \dfrac{dg_j(x^*)}{dx} \\ u_j \geq 0 \\ u_j\left[b_j - g_j(x^*)\right] = 0 \\ g_j(x^*) \geq b_j \end{cases}$$

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

شرایط درجه دوم بهینگی (شرط کافی کمینگی و یگانگی نقطه جواب)؟؟

تابع در x^* اکیداً محدب باشد و در سایر نقاط، محدب باشد (؟)



شرایط درجه دوم بهینگی (تعیین کمینگی و یگانگی نقطه جواب):

تابع در x^* اکیداً محدب باشد و در سایر نقاط، محدب باشد

+

ناحیه امکانپذیر محدب باشد (یعنی برای دو نقطه امکانپذیر، خط واصل آنها کاملا در ناحیه امکانپذیر واقع شود)

$$\begin{aligned} &Min\ Z(x) \\ &s.t. \\ &g_j(x) \geq b_j \quad \forall j \end{aligned}$$

شرایط اینکه نقطه x^* یگانه جواب مسئله کمینه سازی باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ(x^*)}{dx} = \sum_j u_j \dfrac{dg_j(x^*)}{dx} \\ u_j \geq 0 \\ u_j\left[b_j - g_j(x^*)\right] = 0 \\ g_j(x^*) \geq b_j \end{cases}$$

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

شرط لازم

شرایط درجه دوم بهینگی
Second Order Conditions

شرط کافی

تابع در x^* اکیداً محدب باشد.

تابع در سایر نقاط، محدب باشد.

ناحیه امکانپذیر محدب باشد.

2.5. Consider the program min $z(x) = (x - 2)^2$ subject to $0 \leq x \leq 1$.

(a) Write this program in standard form.

(b) Show that the first-order conditions [2.7] hold at the point that minimizes $z(x)$ in the feasible region.

منابع

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 2)