دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

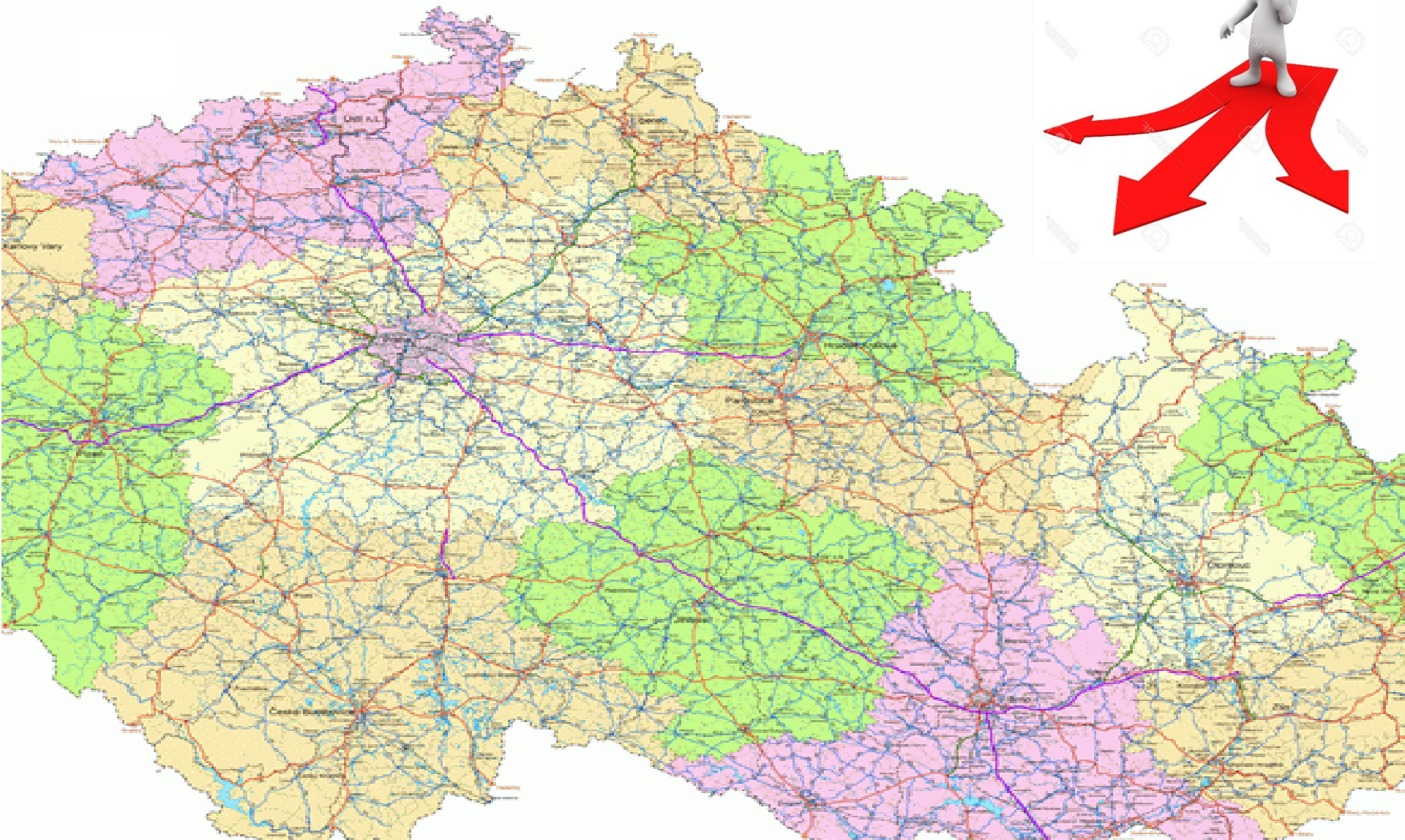
تحلیل سیستم های حمل و نقل

کوتاهترین مسیر

مدرس: محمد تمنایی

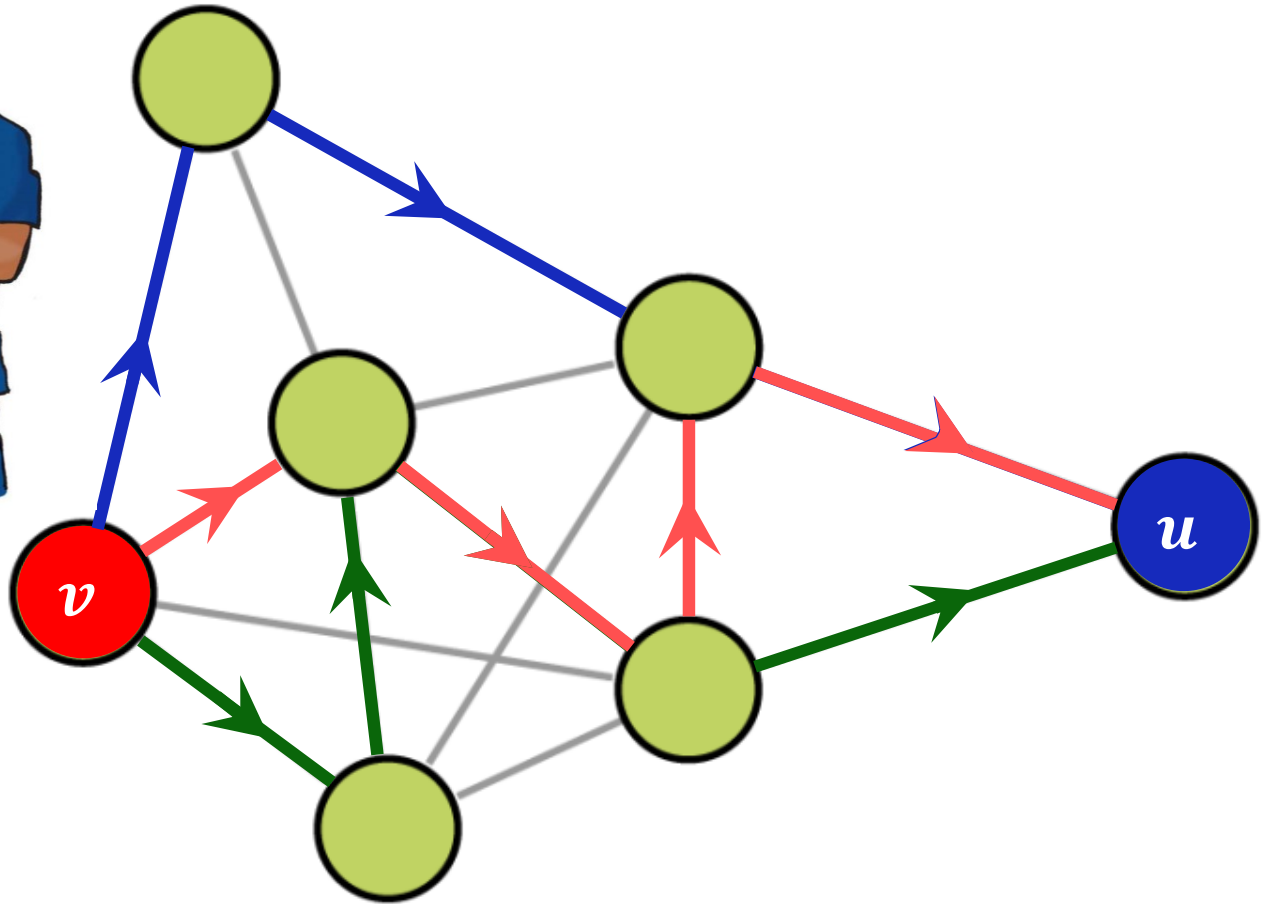
بهار ۱۳۹۶

یافتن کوتاه ترین مسیر



یافتن کوتاه ترین مسیر

کوتاه ترین مسیر بین هر زوج مبدأ-مقصد کدام است؟



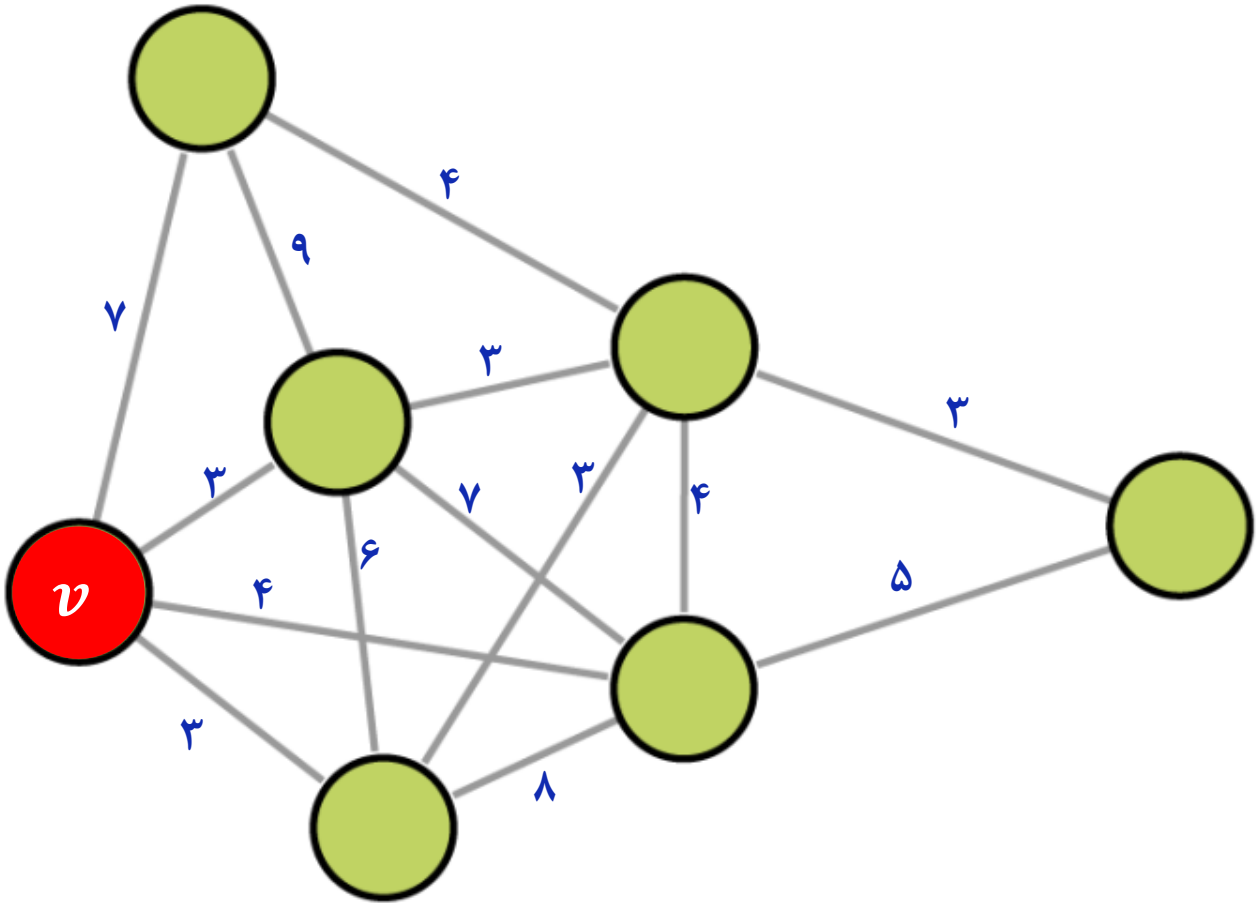
الگوریتم دایکسترا (Dijkstra Algorithm)

جوابی برای این سؤال:

کوتاه ترین مسیر بین هر زوج گره های مبدأ-مقصد.

- ✓ هم در شبکه جهتدار و هم در شبکه غیرجهتدار کاربرد دارد.
- ✓ همه کمان ها دارای وزن (زمان، مسافت، هزینه) نامنفی هستند.

یافتن کوتاه ترین مسیر



ورودی

گراف وزندار $G = \{E,V\}$

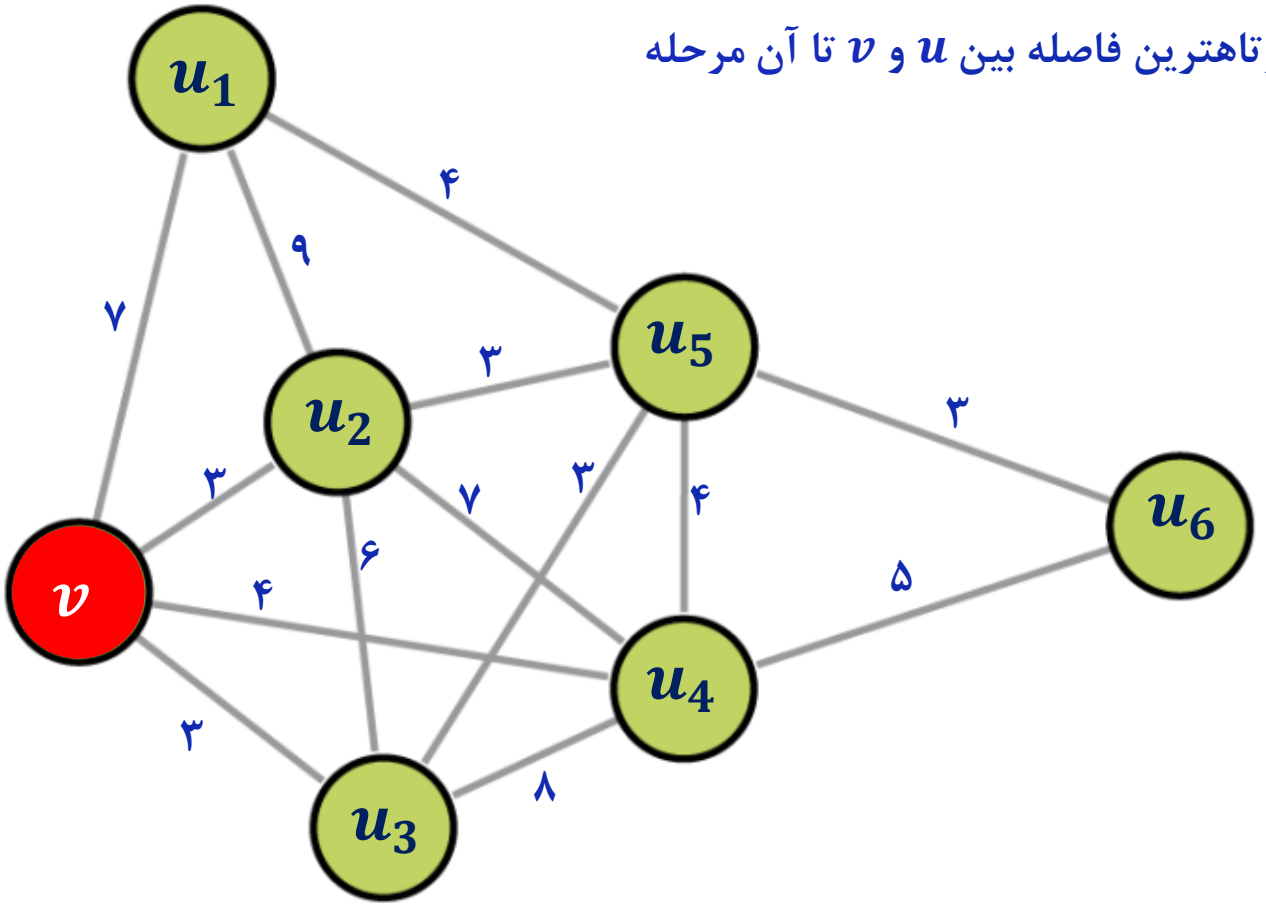
گره مبدأ v $(v \in V)$

خروجی

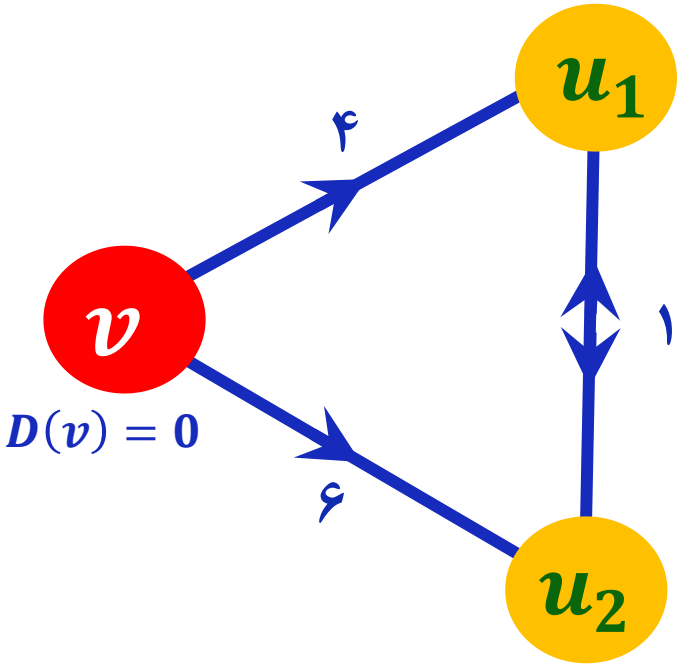
کوتاه ترین مسیر از v به کلیه نقاط

یافتن کوتاه ترین مسیر

- ✓ برای هر گره u : کوتاهترین فاصله تا v محاسبه می گردد.
- ✓ الگوریتم در هر مرحله، مجموعه کوتاهترین مسیرها را ذخیره می کند.
- ✓ در هر مرحله: $D(u)$ = مقدار کوتاهترین فاصله بین u و v تا آن مرحله

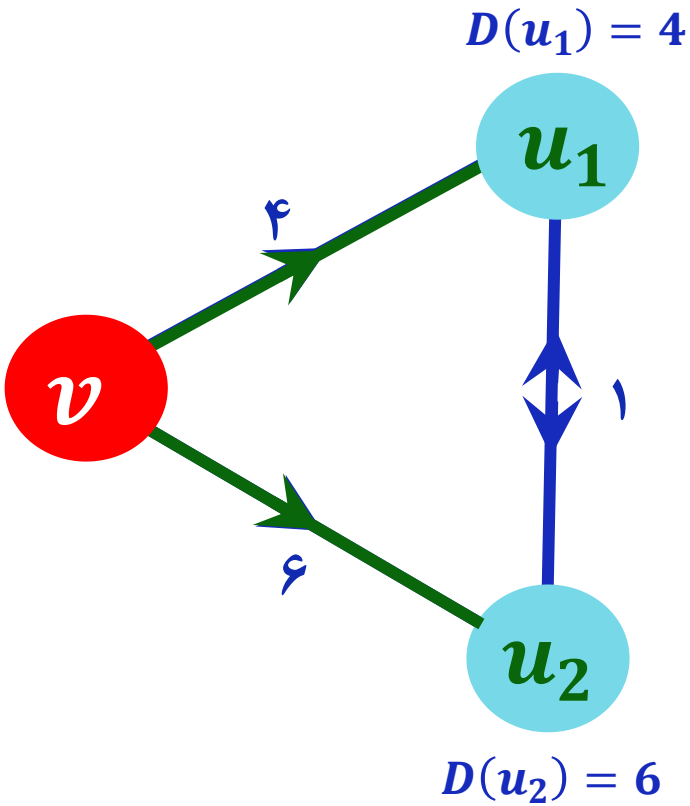


- ✓ به هر گره ای که کوتاهترین مسیر برایش یافت شد برچسب زده می شود (visited node).
- ✓ در ابتدا فقط گره مبدا برچسب دارد: $D(v) = 0$



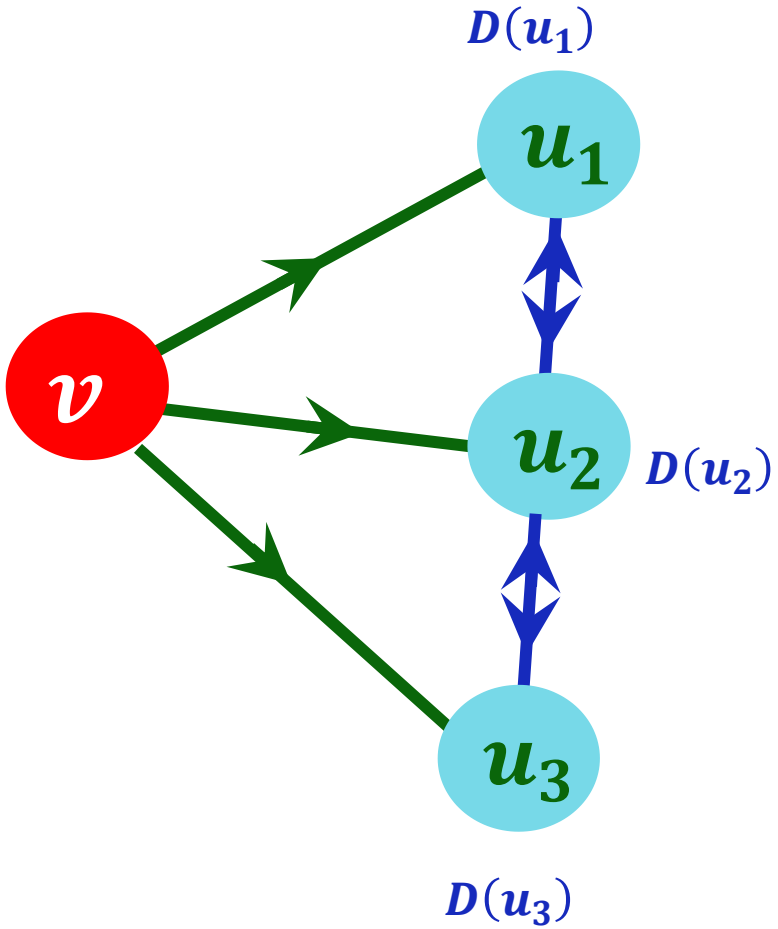
یافتن کوتاه ترین مسیر

به کدامیک برچسب زده شود؟ u_1 یا u_2 ؟



با استدلال استقرایی

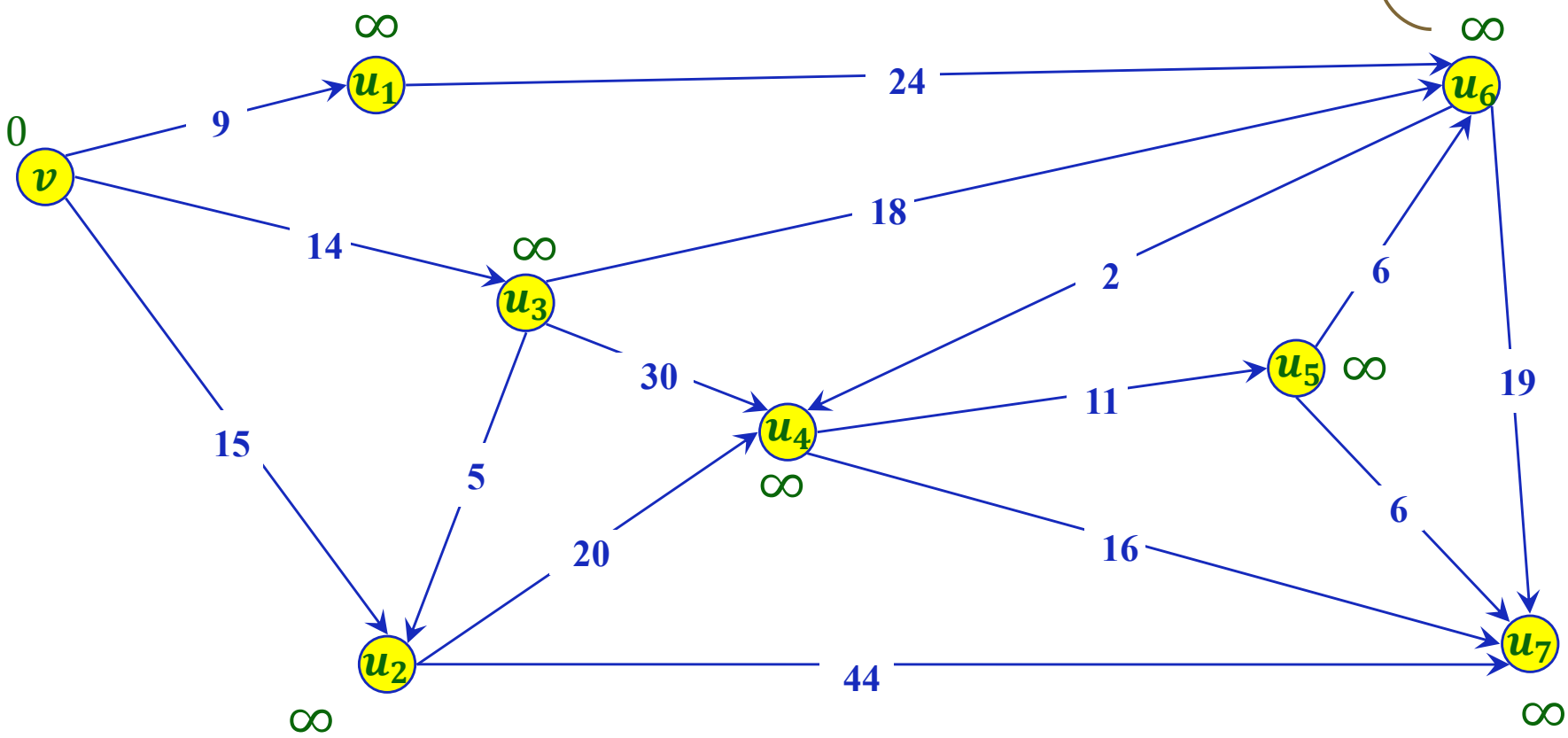
در هر مرحله، از بین چند گره ی کاندید برای برچسب زدن،
گره ای برچسب زده شود که مقدار D کمتری دارد.



$Visited = \emptyset$

$Unvisited = \{v, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$

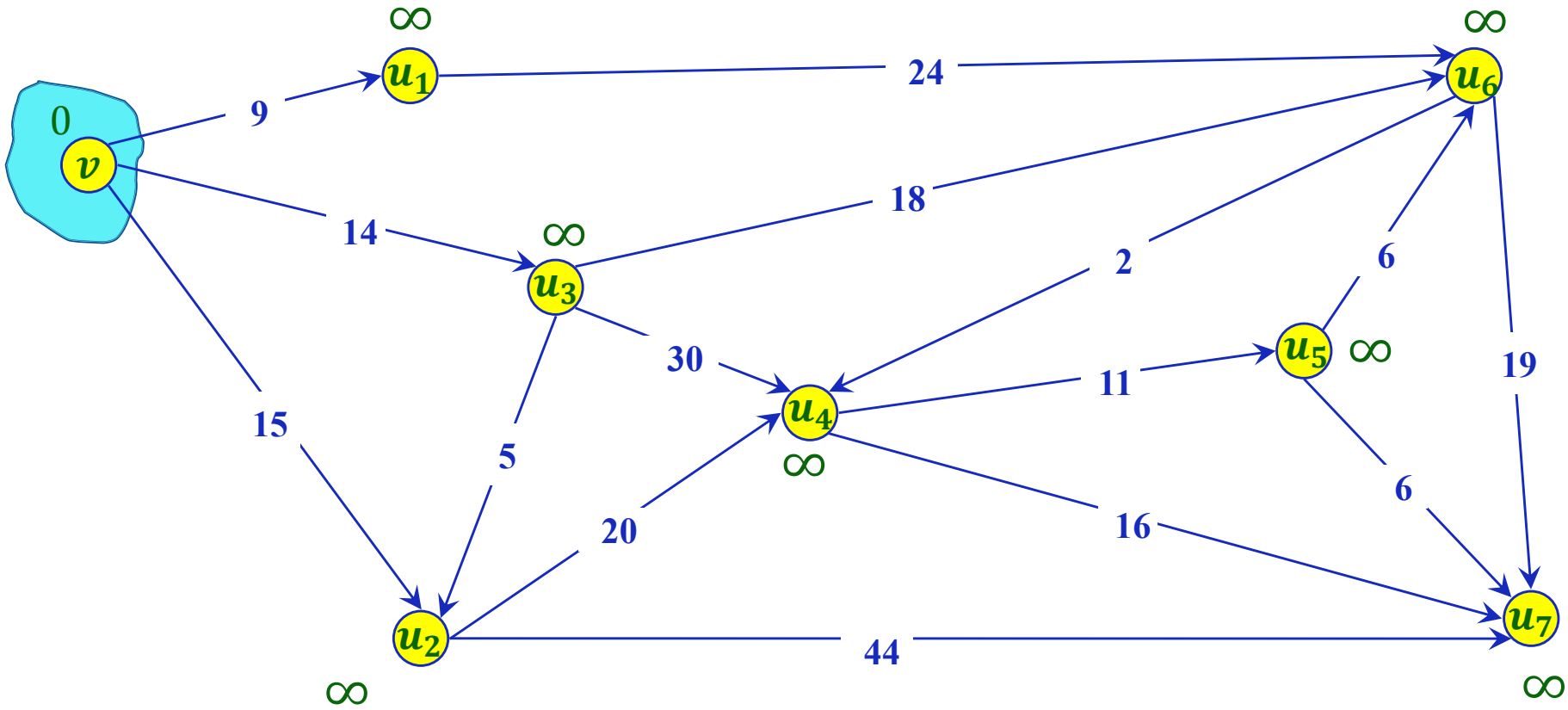
$D(u_6) = \infty$



از مجموعه $Unvisited$ گره با کمترین مقدار D انتخاب و برچسب زده شود.

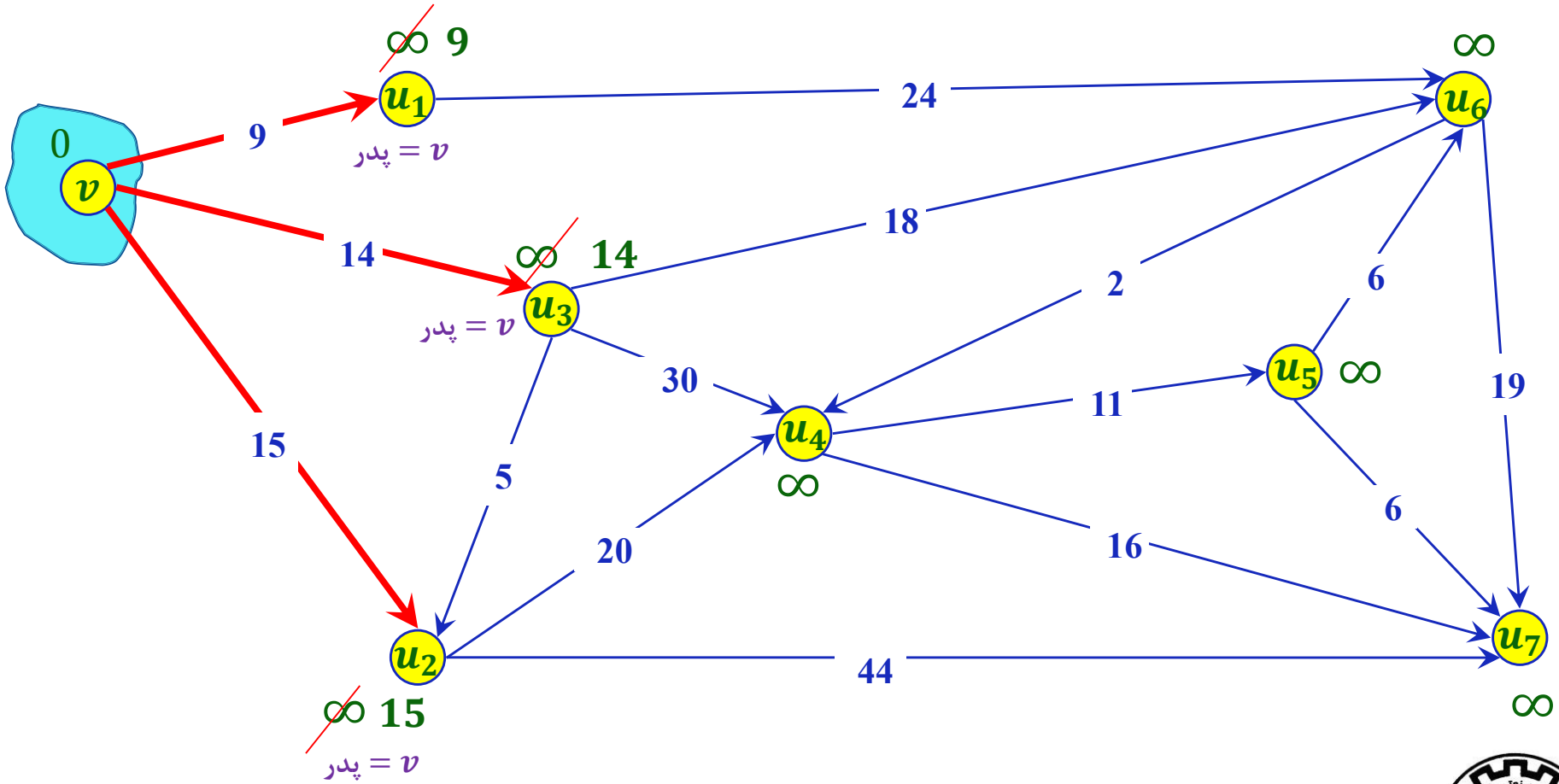
$Visited = \{v\}$

$Unvisited = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$



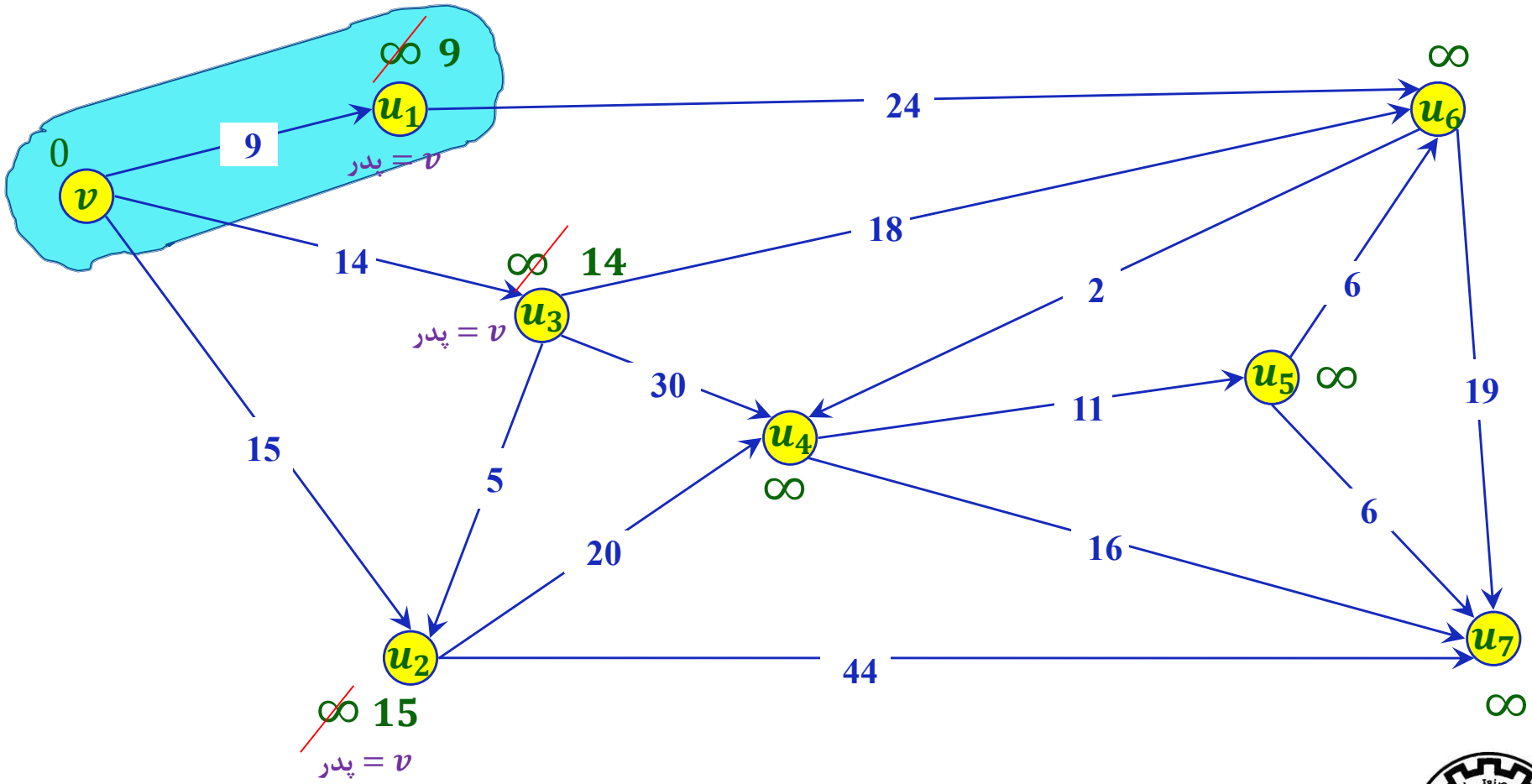
گره برچسب زده شده، به مجموعه $visited$ افزوده شود.

$Visited = \{v\}$
$Unvisited = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$



مقدار D (و پدر) برای همه ی همسایگان $Unvisited$ گره برچسب خورده، به روز شود.

$Visited = \{v, u_1\}$
$Unvisited = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$



از مجموعه $Unvisited$ گره با کمترین مقدار D انتخاب و برچسب زده شود.

گره برچسب زده شده، به مجموعه $visited$ افزوده شود.

در الگوریتم دایکسترا، اگر هدف، یافتن کوتاهترین مسیر از مبدأ v به صرفاً یک گره همچون گره i باشد، به محض برچسب خوردن گره i می توان عملیات را پایان داد.

یافتن کوتاه ترین مسیر

الگوریتم حل دایکسترا

شبکه $G(V,E)$ مجموعه گره ها V مجموعه کمانها E گره مبدأ v $(v \in V)$

$t_{ij} \geq 0$ طول کمان (i,j) اگر بین i و j کمانی وجود ندارد: $t_{ij} \leftarrow \infty$

N مجموعه گره هایی که تاکنون طول کوتاهترین فاصله آنها پیدا نشده است (Unvisited).

$D(j)$ طول کوتاهترین مسیر جاری از گره مبدأ v به گره j C شمارنده تکرار

$P(j) = k$ در مسیر کوتاهترین مسیر جاری از گره مبدأ v به گره j، گره k دقیقاً قبل از گره j قرار گرفته است.

گام صفر

$N \leftarrow V - \{v\}$

$D(v) = 0$

$\forall j \in N: D(j) = t_{vj}$

$\forall j \in N: P(j) = v$

$C \leftarrow 1$

یافتن کوتاه ترین مسیر

الگوریتم حل دایکسترا

شبکه $G(V,E)$ مجموعه گره ها V مجموعه کمانها E گره مبدأ v $(v \in V)$

$t_{ij} \geq 0$ طول کمان (i,j) اگر بین i و j کمانی وجود ندارد: $t_{ij} \leftarrow \infty$

N مجموعه گره هایی که تاکنون طول کوتاهترین فاصله آنها پیدا نشده است (Unvisited).

$D(j)$ طول کوتاهترین مسیر جاری از گره مبدأ v به گره j C شمارنده تکرار

$P(j) = k$ در مسیر کوتاهترین مسیر جاری از گره مبدأ v به گره j ، گره k دقیقاً قبل از گره j قرار گرفته است.

گام ۱

گره i^* را بیابید.

$$D(i^*) = \min_{i \in N}\{D(i)\}$$

$$N \leftarrow N - \{i^*\}$$

$$C \leftarrow C + 1$$

گام ۲

برای هر کمان (i^*, j) که $j \in N$ و $D(j) > D(i^*) + t_{i^*j}$ قرار دهید:

$$D(j) \leftarrow D(i^*) + t_{i^*j}$$

$$P(j) \leftarrow i^*$$

اگر $C < |E| - 1$ برو به گام ۱. وگرنه برو به گام ۳.

یافتن کوتاه ترین مسیر

شبکه $G(V,E)$ مجموعه گره ها V مجموعه کمانها E گره مبدأ v $(v \in V)$

$t_{ij} \geq 0$ طول کمان (i,j) اگر بین i و j کمانی وجود ندارد: $t_{ij} \leftarrow \infty$

N مجموعه گره هایی که تاکنون طول کوتاهترین فاصله آنها پیدا نشده است (Unvisited).

$D(j)$ طول کوتاهترین مسیر جاری از گره مبدأ v به گره j C شمارنده تکرار

$P(j) = k$ در مسیر کوتاهترین مسیر جاری از گره مبدأ v به گره j ، گره k دقیقاً قبل از گره j قرار گرفته است.

گام ۳

مجموعه ی $T = \{(P(j),j) \mid j \in V, j \neq v\}$ را تشکیل دهید.

T درخت کوتاهترین مسیر از v به همه گره ها است.

پیچیدگی (Complexity) الگوریتم دایکسترا

نوع عملیات در الگوریتم دایکسترا: مقایسه + عملیات جمع

	تعداد مقایسه	تعداد عملیات جمع
گام ۱ $D(i^*) = \underset{i \in N}{Min}\{D(i)\}$	$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{(n-1)n}{2}$ $\sim n^2$	ــــــــــــــــ
گام ۲ برای هر کمان (i^*, j) که $j \in N$ و $\ldots D(j) > D(i^*) + t_{i^*j}$	$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{(n-1)n}{2}$ $\sim n^2$	$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{(n-1)n}{2}$ $\sim n^2$

امام رضا علیه‌السلام

مَنْ سَأَلَ اللهَ التَّوْفیقَ

وَلَمْ یَجْتَهِدْ فَقَدِ اسْتَهْزَأَ بِنَفْسِهِ

میزان الحکمه / حدیث ۲۷۹۰

هر کس از خدا توفیق بخواهد و تلاش نکند

خود را مسخره کرده است.