دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

مسئله تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

(تبدیل به مسئله با تقاضای ثابت)

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فهرست:

مسئله تخصیص ترافیک در شرایط تعادل استفاده کننده (با تقاضای متغیر):

$$Min\, Z(X,q) = \sum_{a} \int_{0}^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_{0}^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

$S.t.$

$$\sum_{k} f_k^{rs} = q_{rs} = D_{rs}(u_{rs}) \quad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k, r, s$$

$$x_a = \sum_{r}\sum_{s}\sum_{k} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$ محدودیت تعریفی:

ساده سازی: تغییر در نمایش مسئله

مسئله UE با تقاضای متغیر

تبدیل به:

مسئله UE با تقاضای ثابت

مدل سرریز هزینه-صفر

Zero-Cost Overflow Formulation

مدل تقاضای مازاد

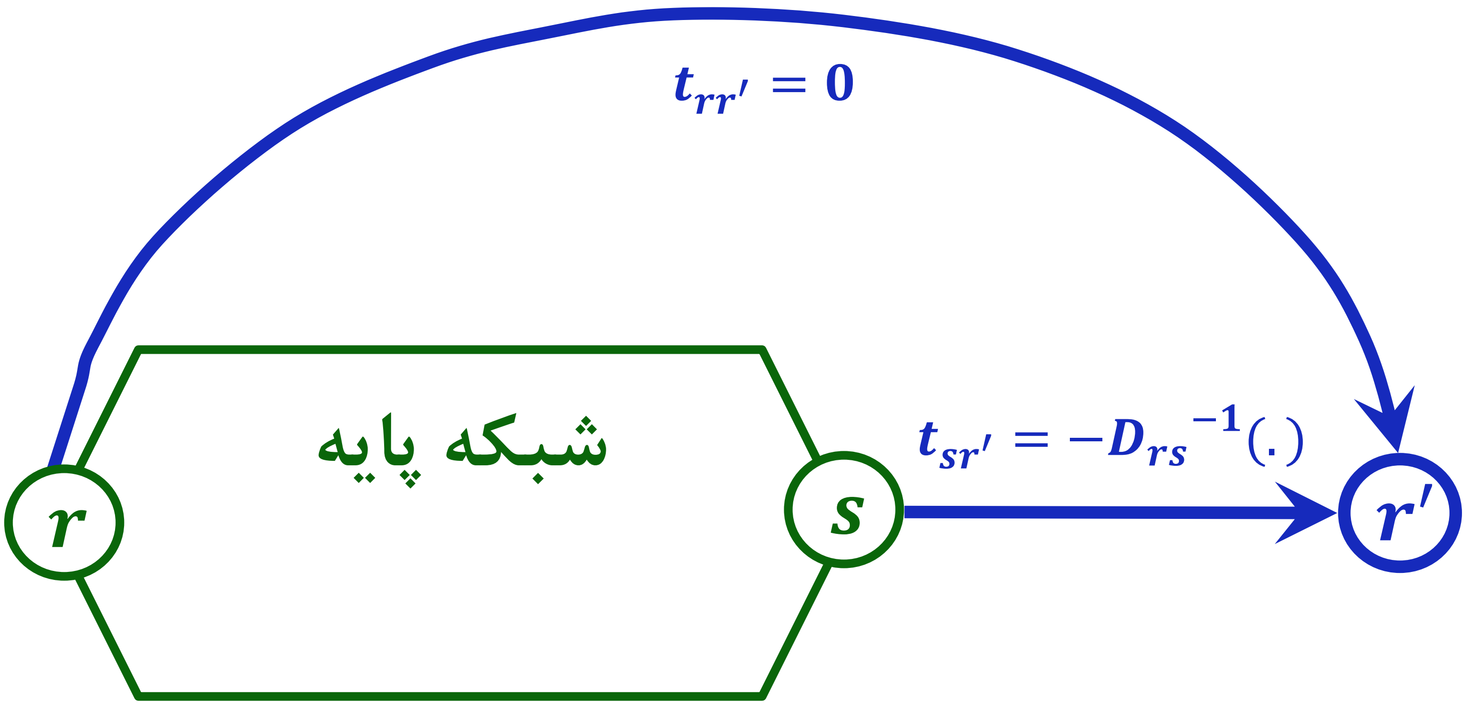
Excess-Demand Formulation

روش: افزودن گره یا کمان مجازی (**Dummy**)

مدل سرریز هزینه صفر:

شبکه پایه حمل و نقل برای یک مبدأ-مقصد مشخص rs

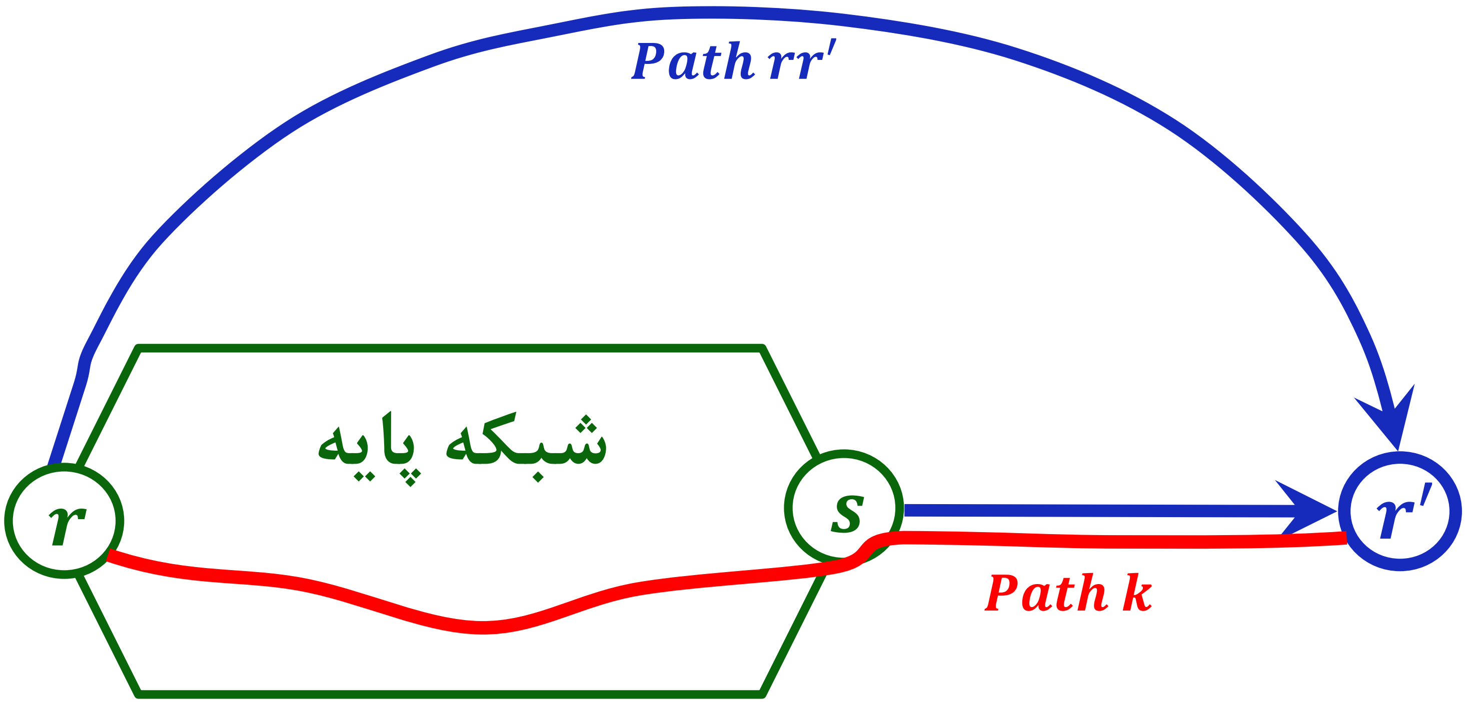
ویرایش: افزودن ۳ المان به شبکه پایه (برای هر مبدأ-مقصد rs)



- ✓ گره مقصد مجازی **dummy destination node (r')**
- ✓ کمان مولد **generating link (sr')**
- ✓ کمان سرریز هزینه-صفر **zero-cost overflow link (rr')**

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

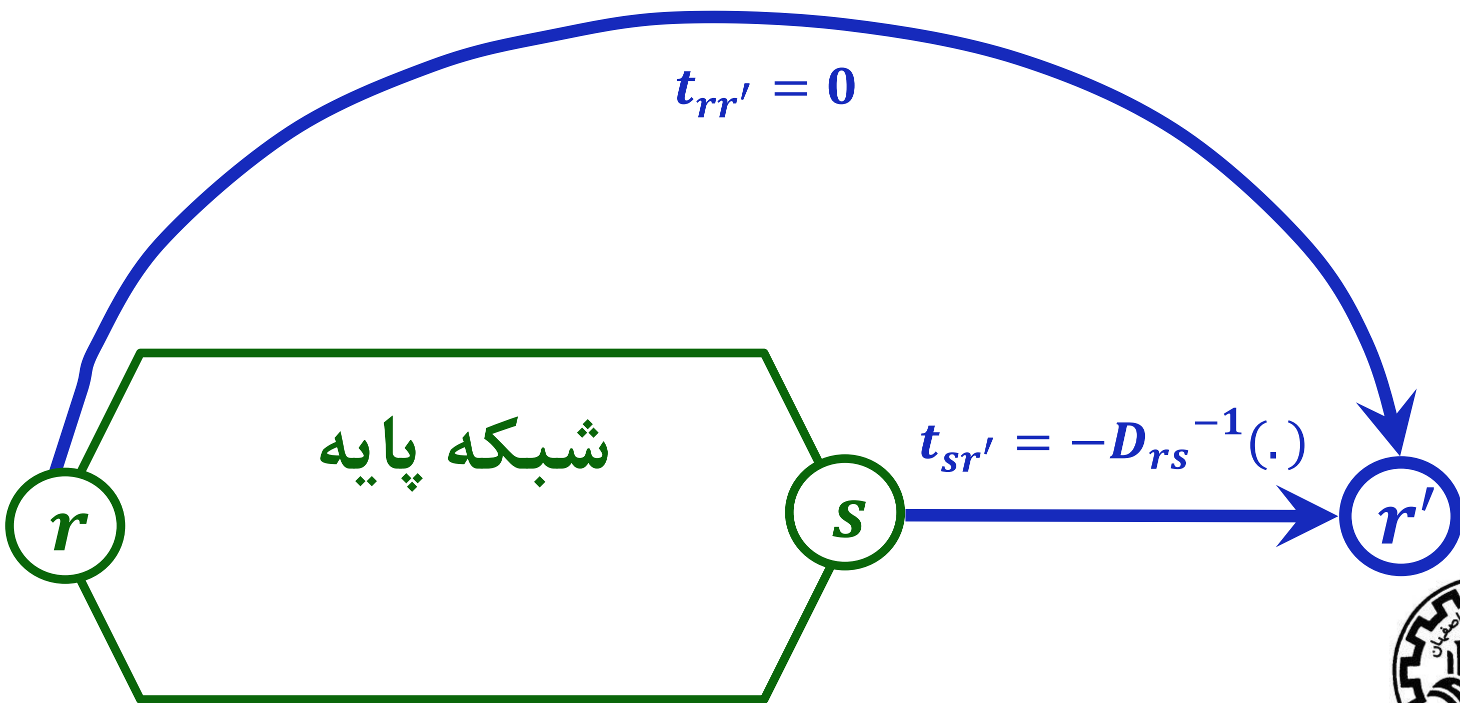
- ✓ تنها فرض در این روش: گره های r و r' خیلی نزدیک بهم هستند ($t_{rr'} = 0$).
- ✓ یادآوری: در شرایط تعادل، زمان سفر مسیرهای استفاده شده یک مبدأ–مقصد برابر است.



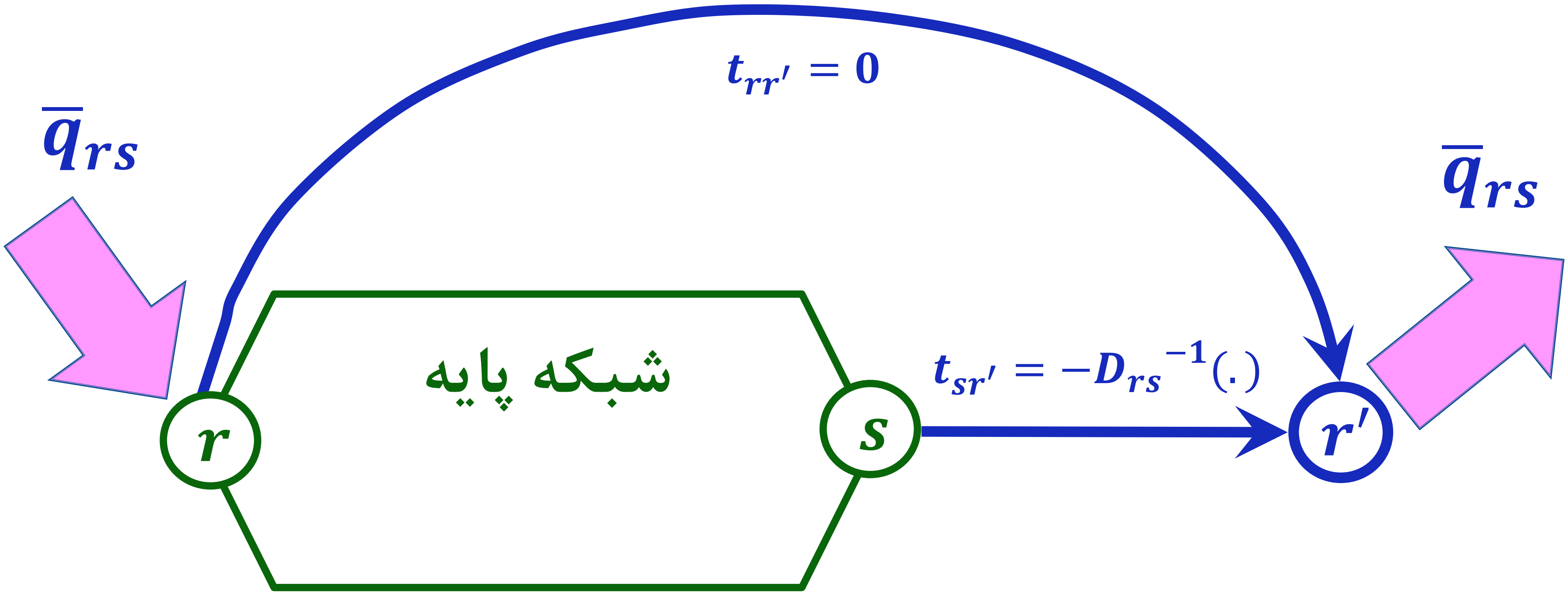
زمان سفر مسیر k	=	زمان سفر مسیر rr'
$u_{rs} + t_{sr'}$	=	0
$D_{rs}^{-1}(q_{rs}) + t_{sr'}$	=	0

$$If \quad q_{rs} > 0 \rightarrow u_{rs} = D_{rs}^{-1}(q_{rs})$$

$$t_{sr'} = -D_{rs}^{-1}(q_{rs})$$



تقاضای ثابت $\overline{q}_{rs}$ (کران بالا)



تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

$$\min z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{x_{sr'}} t_{sr'}(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{x_{rr'}} t_{rr'}(\omega)\, d\omega$$

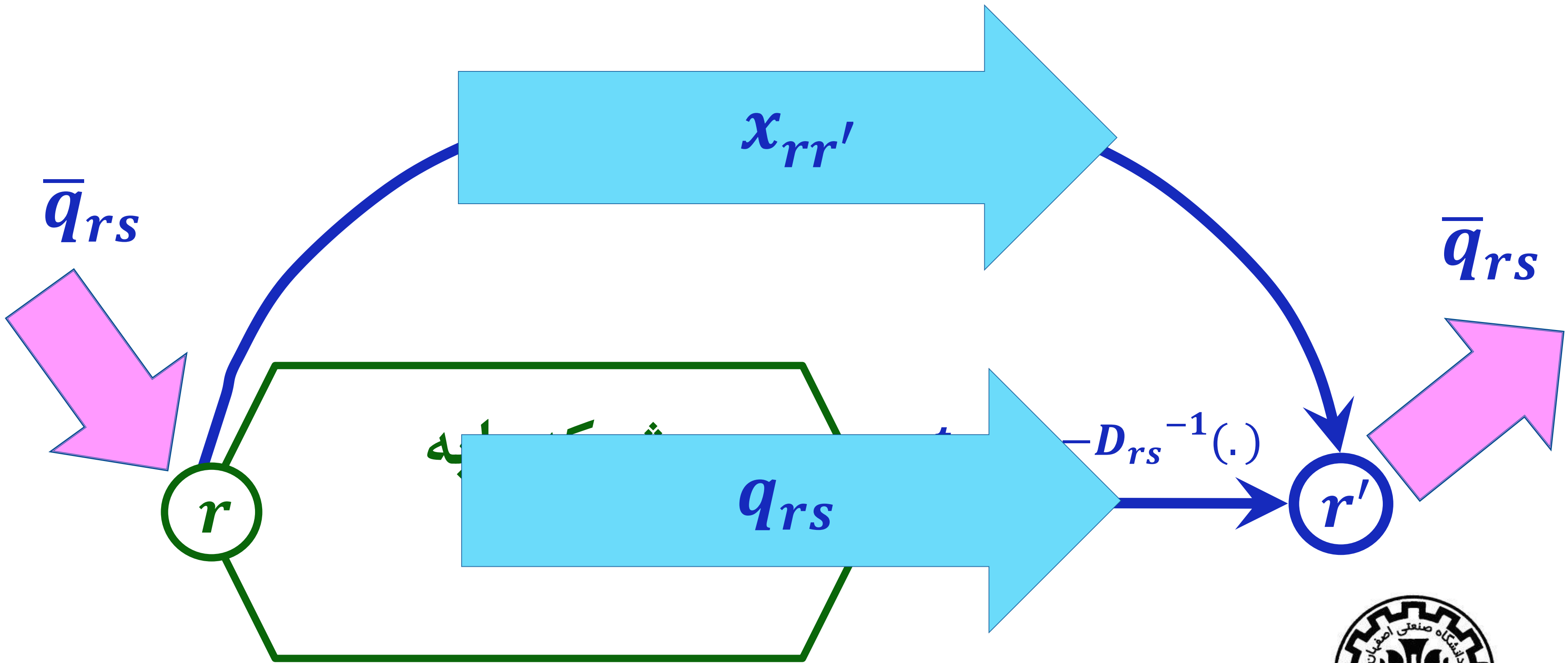
$$\sum_k f_k^{rs} + x_{rr'} = \bar{q}_{rs} \qquad \forall\ r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall\ k, r, s$$

$$x_{rr'} \geq 0 \qquad \forall\ r, s$$

ایده اصلی: تبدیل دو نوع مجهول (حجم کمانها+ جریان **OD** ها) به یک نوع (حجم کمانها)

$$\min z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{\overset{q_{rs}}{x_{sr'}}} \overset{-D_{rs}^{-1}(.)}{t_{sr'}}(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{x_{rr'}} \overset{0}{t_{rr'}}(\omega)\, d\omega$$



$$\min z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{x_{sr'}} t_{sr'}(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{x_{rr'}} t_{rr'}(\omega)\, d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\min z(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega$$

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

Zero-Cost Representation	**Primary Representation**
With Fixed-Demand ($\bar{q}_{rs}$)	**With Variable-Demand (q_{rs})**

Zero-Cost Representation:

$$\sum_k f_k^{rs} + x_{rr'} = \bar{q}_{rs} \qquad \forall\, r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall\, k, r, s$$

$$x_{rr'} \geq 0 \qquad \forall\, r, s$$

Primary Representation:

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall\, r, s$$

$$q_{rs} \leq \bar{q}_{rs} \qquad \forall\, r, s$$

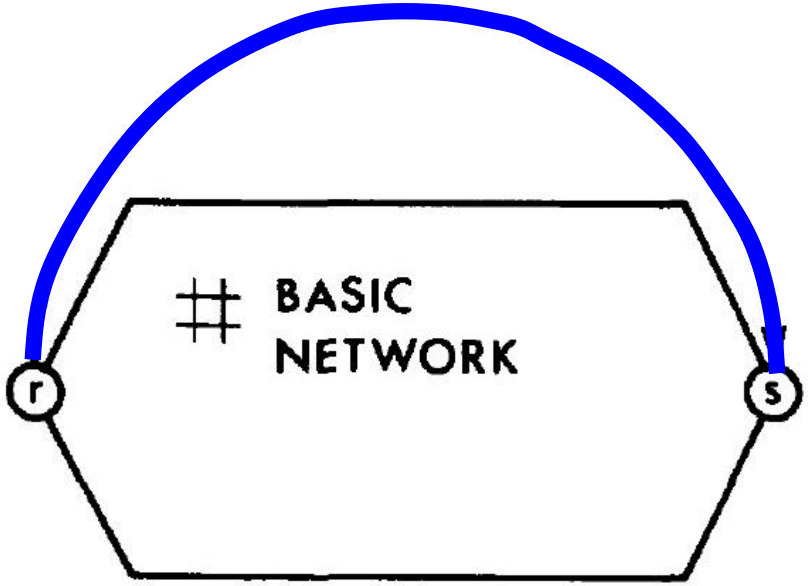
$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \qquad \forall\, r, s$$

حل مسئله با استفاده از الگوریتم استاندارد ترکیب محدب (برای تقاضای ثابت)

variable e_{rs} = excess demand

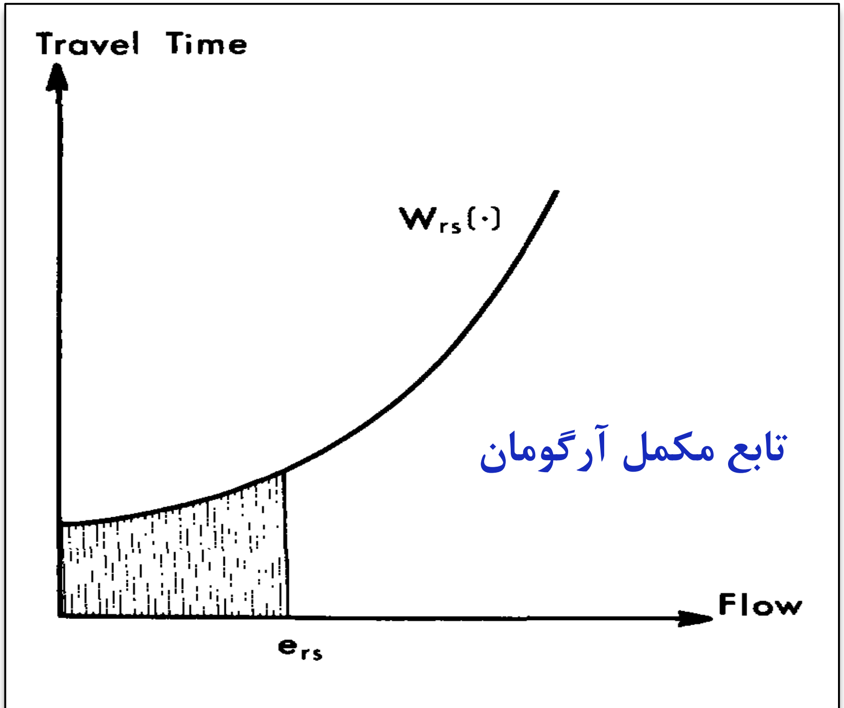
e_{rs} = trips not accommodated between origin *r* and destination *s*

$$e_{rs} = \bar{q}_{rs} - q_{rs}$$



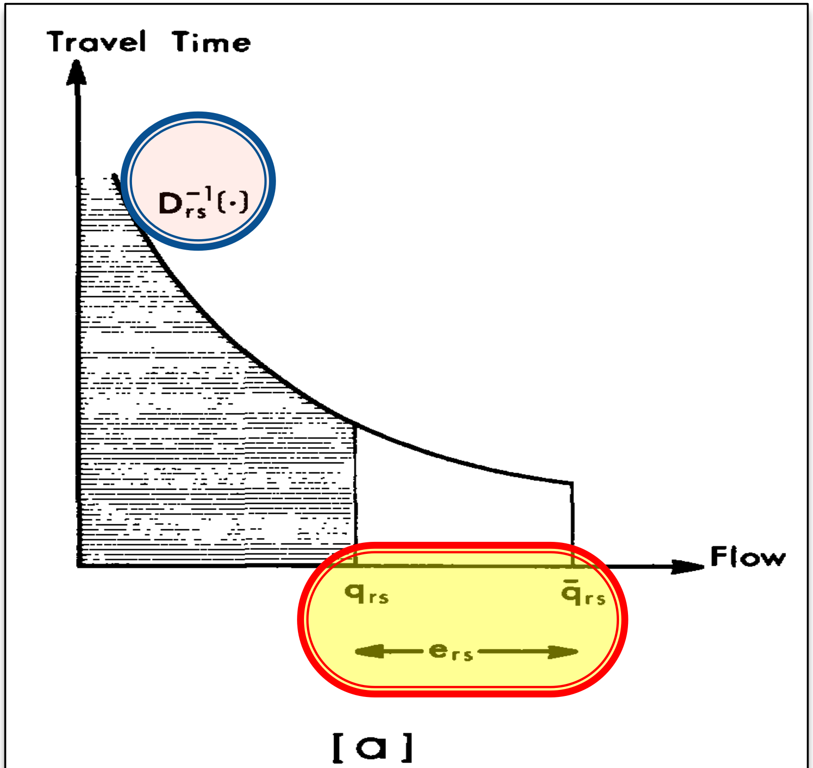
$W_{rs}(\cdot)$ = **argument-complementing function of inverse demand**

$$W_{rs}(e_{rs}) = D_{rs}^{-1}(q_{rs}) \;\; \forall r, s$$

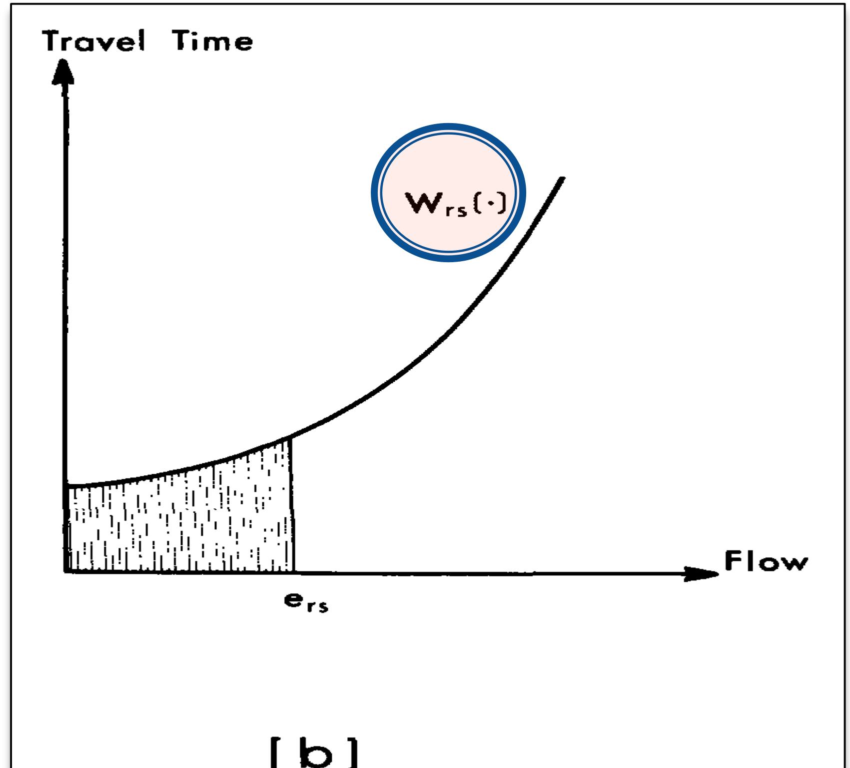


تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

$$W_{rs}(e_{rs}) = D_{rs}^{-1}(q_{rs}) \ \forall r, s$$



Inverse demand function

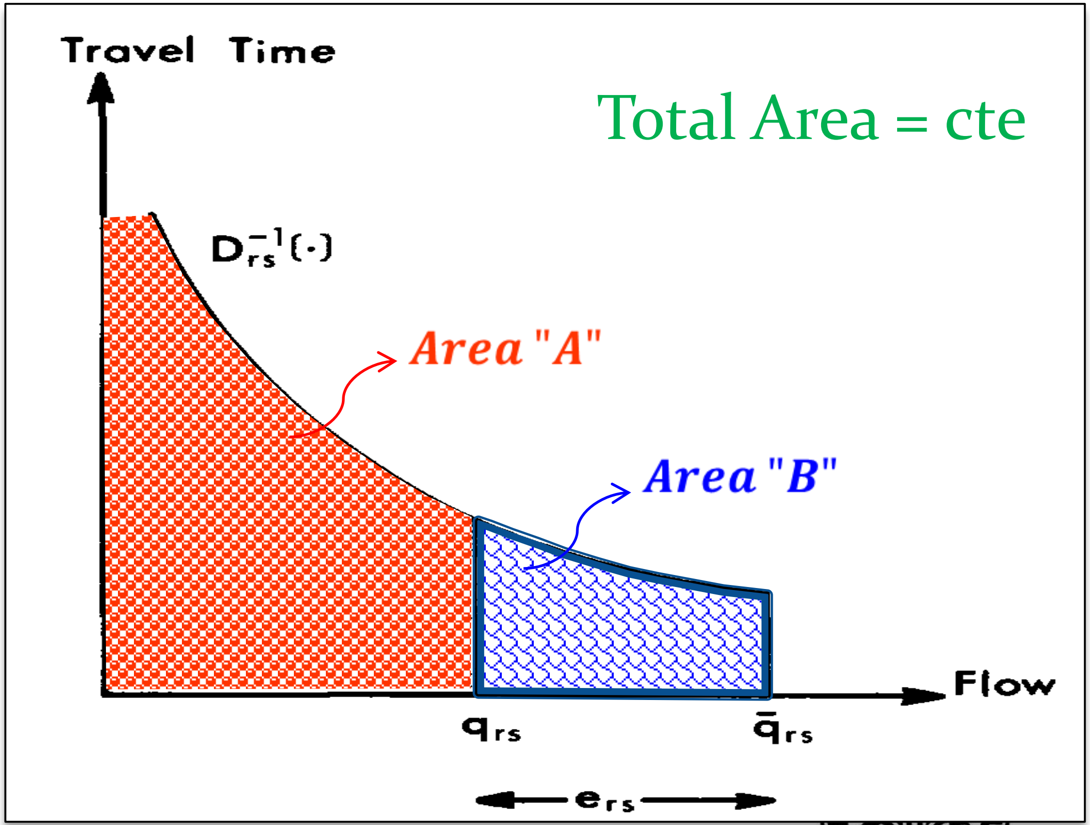


associated
argument-completing function

"Variable-Demand problem" Objective:

Minimizing
the travel time of each individual motorist
Simultaneously with

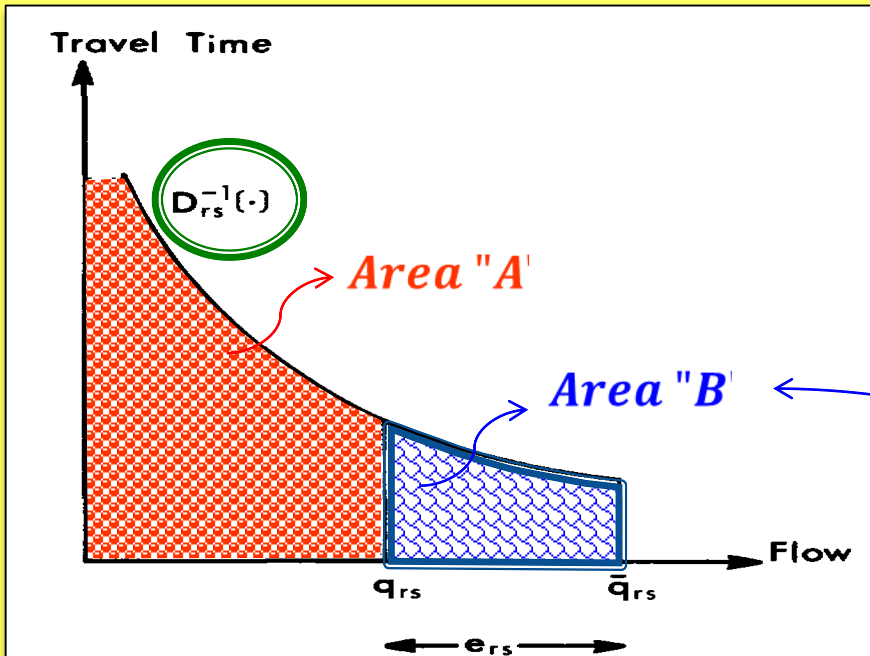
Satisfying
*the **maximum demand** between each OD pair*

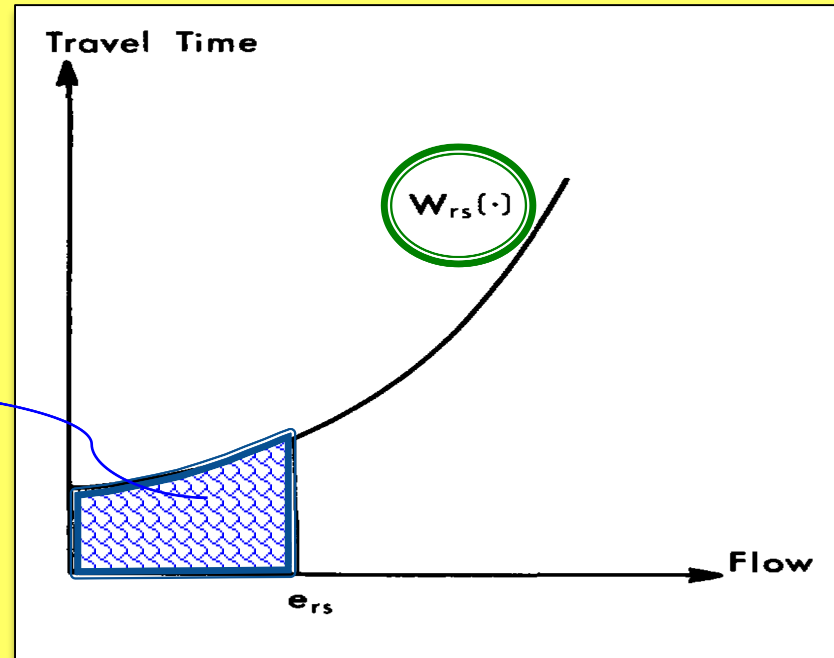


maximizing Area "A"

minimizing Area "B"

Excess-Demand Formulation





$$\min z(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega$$

$$\min z(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{e_{rs}} W_{rs}(v)\, dv$$

objective function:

$$\min z(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega$$

Each term in 2nd sum can be decomposed into two integrals:

$$\int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega = \boxed{\int_0^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega} - \int_{q_{rs}}^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega$$

ثابت

$$\vartheta = q_{rs} - \omega$$

$$-\int_{q_{rs}}^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega = -\int_{\bar{q}_{rs}-q_{rs}}^{0} D_{rs}^{-1}(\bar{q}_{rs} - v)(-dv) = -\int_{0}^{e_{rs}} W_{rs}(v)\, dv$$

O.F. : $$\boxed{\min z(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{e_{rs}} W_{rs}(v)\, dv}$$

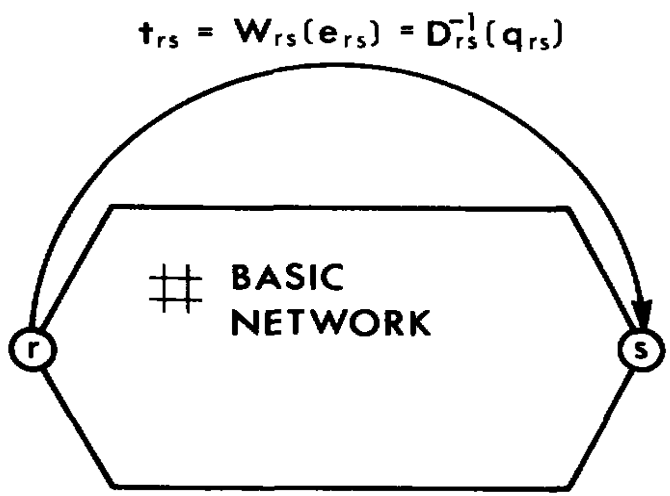
$$\sum_k f_k^{rs} + e_{rs} = \bar{q}_{rs} \qquad \forall\, r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall\, k, r, s$$

$$e_{rs} \geq 0 \qquad \forall\, r, s$$

$W_{rs}(e_{rs})$ همه ویژگی های یک تابع عملکرد کمان را دارد.

$$\min z(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{e_{rs}} W_{rs}(v)\, dv$$

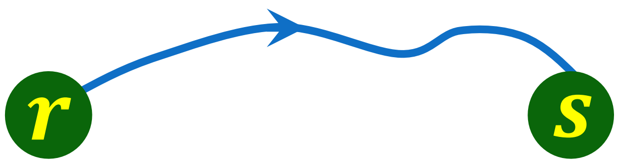


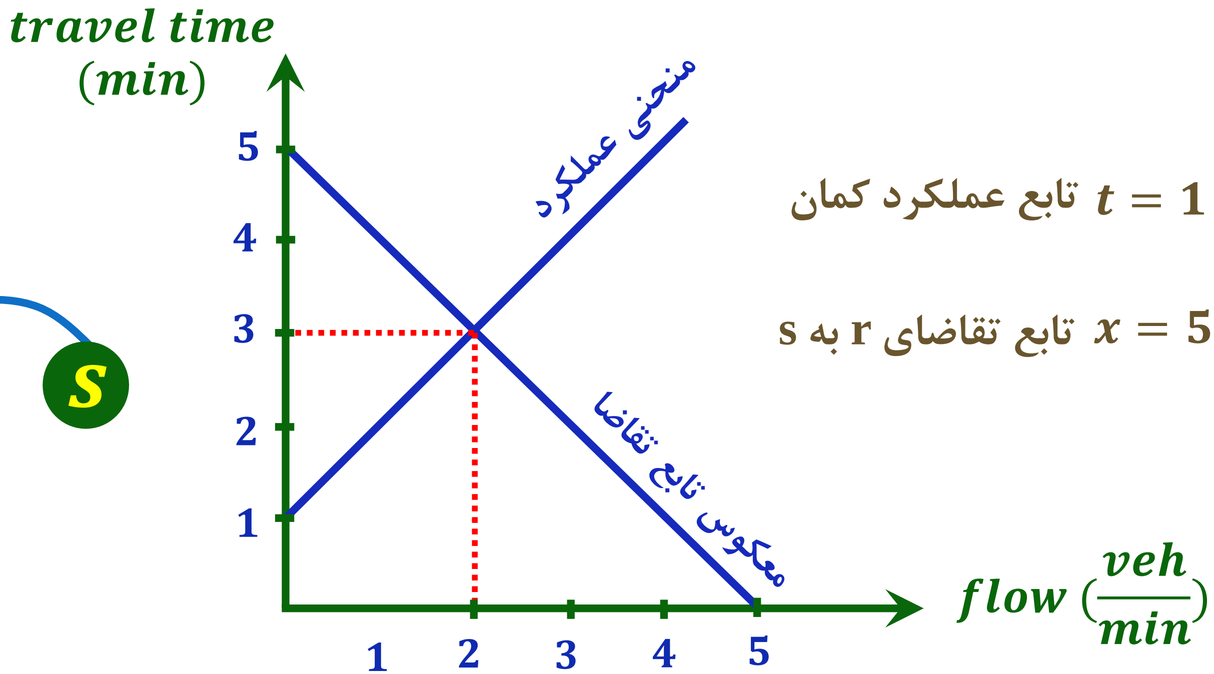
$$W_{rs}(e_{rs}) = D_{rs}{}^{-1}(q_{rs}) \ \forall r, s$$

At equilibrium: $W_{rs}(e_{rs}) = u_{rs}$

equilibrium conditions for variable-demand equilibrium

are met.





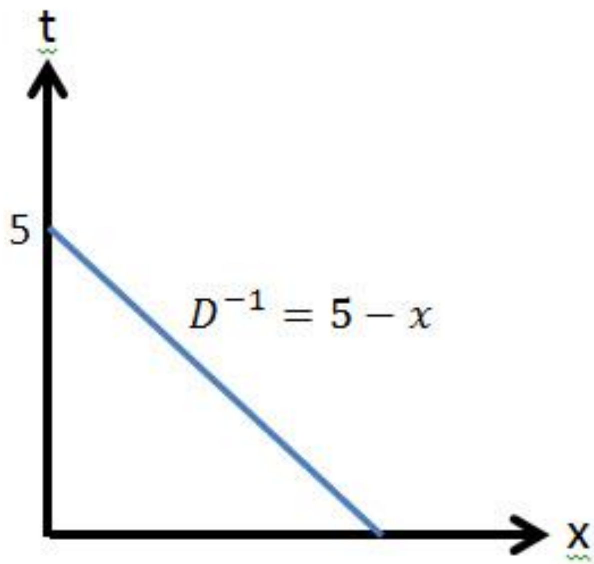
مثال:

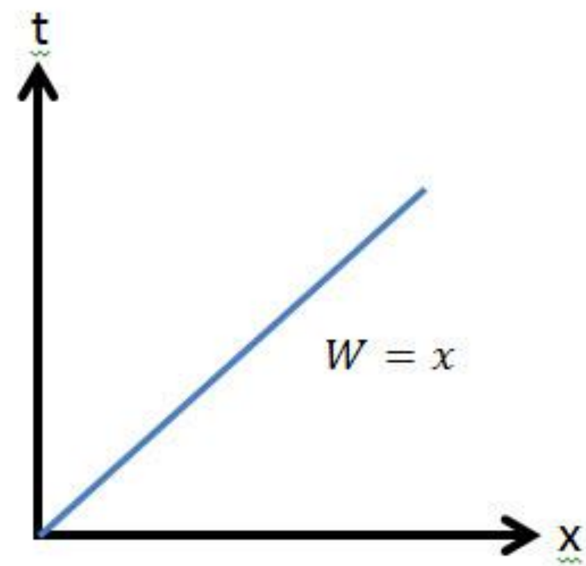
$t = 1 + x$ تابع عملکرد کمان

$x = 5 - t$ تابع تقاضای r به s

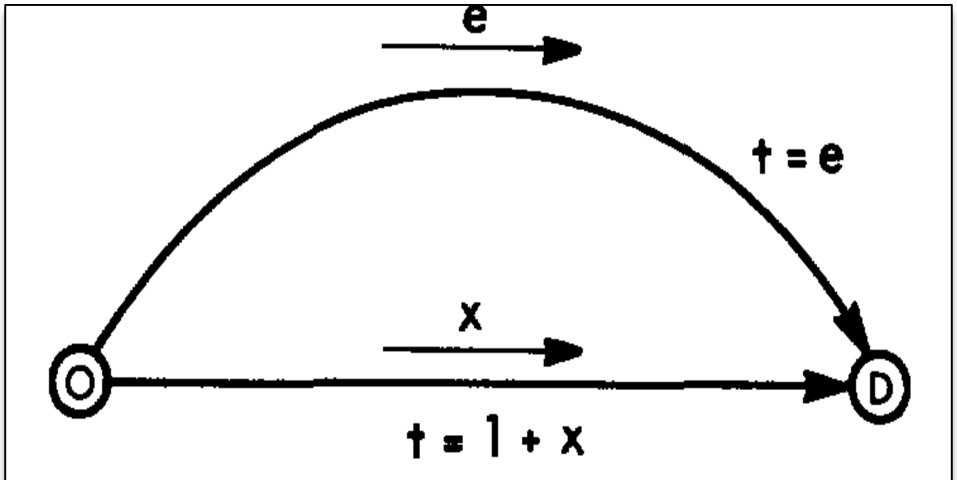
تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

$$\left\{\begin{array}{c} D_{rs}^{-1}(q_{rs}) = 5 - q_{rs} \ \ ,\bar{q}_{rs} = 5 \\ D_{rs}^{-1}(\bar{q}_{rs} - e_{rs}) = 5 - (\bar{q}_{rs} - e_{rs}) = e_{rs} \\ W_{rs}(e_{rs}) = D_{rs}^{-1}(\bar{q}_{rs} - e_{rs}) \end{array}\right\} \rightarrow \boldsymbol{W_{rs}(e_{rs}) = e_{rs}}$$





The problem can be represented by two-link network:



equivalent UE minimization program:

$$\min z(x, e) = \int_0^x (1 + \omega)\, d\omega + \int_0^e \omega\, d\omega$$

$$x + e = 5$$

$$x, e \geq 0$$

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

$$\min z(x, e) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^2$$

- 1–substituting $e = 5 - x$
- *2–*differentiating
- x = 2.

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 6)