دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

مسئله تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

(روش حل)

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فهرست:

مسئله تخصیص ترافیک در شرایط تعادل استفاده کننده (با تقاضای متغیر):

$$Min\, Z(X,q) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

تابع عملکرد کمانها

تابع معکوس تقاضای OD ها

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} = D_{rs}(u_{rs}) \quad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k,r,s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$ محدودیت تعریفی:

بررسی شرایط درجه اول بهینگی (شروط کوهن تاکر)

$$Min\ Z(X(f,q)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

S.t.

$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} = D_{rs}(u_{rs})\ \ \forall r,s \quad f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad q_{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$

$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$ محدودیت ضمنی (تعریفی)

تابع لاگرانژ مسئله

$$L(f,q,u) = Z\big(X(f,q)\big) + \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})$$

S.t.

$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$

$q_{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$

$$L(f,q,u) = Z\big(X(f,q)\big) + \sum_{rs} u_{rs}\Big(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\Big)$$

S.t. $f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad q_{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$

شرایط درجه اول بهینگی

First Order Conditions

$$\left\{\begin{array}{ll}
f_k^{rs} \dfrac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 & \forall k,r,s \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 & \forall k,r,s \\[2ex]
q_{rs} \dfrac{\partial L}{\partial q_{rs}} = 0 & \forall r,s \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial q_{rs}} \geq 0 & \forall r,s \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial u_{rs}} = 0 & \forall (r,s) \\[2ex]
f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \\[2ex]
q_{rs} \geq 0 & \forall r,s
\end{array}\right.$$

مسئله لاگرانژ نسبت به u_{rs} غیرمقید است

شرایط درجه اول

$$Z(X(f,q)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$L(f,q,u) = Z\big(X(f,q)\big) + \sum_{rs} u_{rs}\big(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\big)$$

S.t. $f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad q_{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$

$$\frac{\partial L}{\partial f_l^{mn}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} Z\big(X(f,q)\big)} \boxed{+ \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}\big(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\big)} \quad \forall m,n,l$$

u_{mn}

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} Z\big(X(f,q)\big) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{a\in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega}_{c_l^{mn}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega}_{0} = c_l^{mn}$$

$$Z(X(f,q)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}{}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$L(f,q,u) = Z\big(X(f,q)\big) + \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})$$

S.t. $f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad q_{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{mn}} =$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_{mn}} \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_{mn}} \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}{}^{-1}(\omega)d\omega}_{-D_{mn}{}^{-1}(q_{mn})} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_{mn}} \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})}_{+u_{mn}} \quad \forall m,n,l$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{mn}} = u_{mn} - D_{mn}{}^{-1}(q_{mn}) \quad \forall m,n,l$$

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

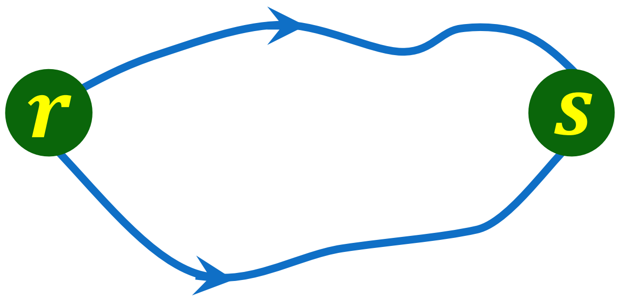
$$L(f,q,u) = Z\big(X(f,q)\big) + \sum_{rs} u_{rs}\Big(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\Big)$$

S.t. $f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad q_{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$

شرایط درجه اول بهینگی

First Order Conditions

$$\left\{\begin{array}{ll}
f_k^{rs}\dfrac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 & \forall k,r,s \\
\dfrac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 & \forall k,r,s \\
q_{rs}\dfrac{\partial L}{\partial q_{rs}} = 0 & \forall r,s \\
\dfrac{\partial L}{\partial q_{rs}} \geq 0 & \forall r,s \\
\dfrac{\partial L}{\partial u_{rs}} = 0 & \forall (r,s) \\
f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \\
q_{rs} \geq 0 & \forall r,s
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{ll}
f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 & \forall k,r,s \\
c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \\
q_{rs}\left(u_{rs} - {D_{rs}}^{-1}(q_{rs})\right) = 0 & \forall r,s \\
u_{rs} - {D_{rs}}^{-1}(q_{rs}) \geq 0 & \forall r,s \\
\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} & \forall r,s \\
f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \\
q_{rs} \geq 0 & \forall r,s
\end{array}\right.$$



u_{rs} : زمان (هزینه) سفر کوتاهترین مسیر بین زوج مبدأ–مقصد rs

$$\begin{cases} q_{rs}\left(u_{rs} - {D_{rs}}^{-1}(q_{rs})\right) = 0 \\ u_{rs} - {D_{rs}}^{-1}(q_{rs}) \geq 0 \\ q_{rs} \geq 0 \end{cases}$$

$$If \quad q_{rs} > 0 \;\; \rightarrow u_{rs} = {D_{rs}}^{-1}(q_{rs})$$

$$If \quad q_{rs} = 0 \;\; \rightarrow u_{rs} \geq {D_{rs}}^{-1}(q_{rs})$$

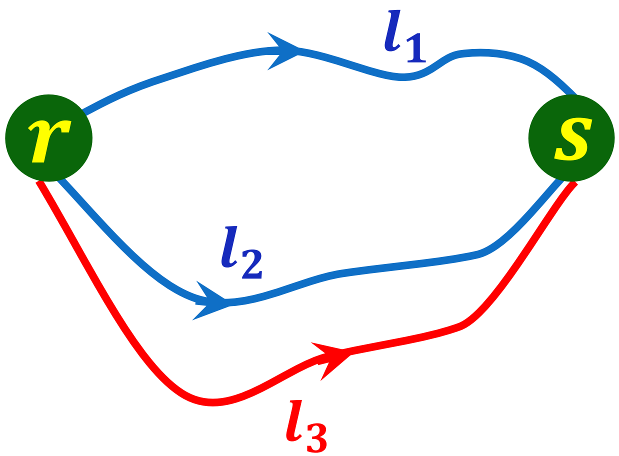
- ✓ اگر تقاضا برای یک مبدأ–مقصد وجود داشته باشد:

  زمان سفر آن مبدأ–مقصد حتما در تابع تقاضا صدق می کند: $D_{rs}(u_{rs}) = q_{rs}$

- ✓ اگر زمان سفر rs بیش از کمترین زمان سفر آن باشد: اصلا نمی تواند تقاضایی را القا نماید.

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

شرایط درجه اول



یادآوری:

u_{rs} : زمان (هزینه) سفر کوتاهترین مسیر بین زوج مبدأ–مقصد rs

شرایط کوهن–تاکر

$$\begin{cases} f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 & \forall k, r, s \\ c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 & \forall k, r, s \\ \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} & \forall (r, s) \\ f_k^{rs} \geq 0 & \forall k, r, s \end{cases}$$

$$If \quad f_{l_1}^{rs} > 0 \rightarrow c_{l_1}^{rs} = u_{rs}$$

$$If \quad f_{l_2}^{rs} > 0 \rightarrow c_{l_2}^{rs} = u_{rs}$$

$$If \quad f_{l_3}^{rs} = 0 \rightarrow c_{l_3}^{rs} \geq u_{rs}$$

شرایط تخصیص UE:

- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده شده یک OD با هم برابر است.
- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده نشده OD بزرگتر (یا مساوی) است.

مقایسه شرایط درجه اول:

مسئله UE با تقاضای ثابت

$$f_k^{rs}\,(f_k^{rs} - u_{rs}) = 0$$

$$f_k^{rs} \geq 0\,, f_k^{rs} - u_{rs} \geq 0$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} = (cte)$$

مسئله UE با تقاضای متغیر

$$f_k^{rs}\,(f_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \qquad q_{rs}\,[u_{rs} - D_{rs}^{-1}(q_{rs})] = 0$$

$$f_k^{rs} \geq 0\,, f_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 \qquad q_{rs} \geq 0\,, u_{rs} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}) \geq 0$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} = D_{rs}(u_{rs})$$

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

شرایط درجه دوم بهینگی
Second Order Conditions

$$Z(X(f,q)) = \sum_{a} \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$$

$t_a(x_a)$ تابع صعودی $\longrightarrow$ $\int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$ اکیداً محدب $\longrightarrow$ $\sum_{a} \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$ اکیداً محدب

${D_{rs}}^{-1}(q_{rs})$ تابع نزولی $\longrightarrow$ $\int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$ اکیداً مقعر $\longrightarrow$ $-\sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$ اکیداً محدب

شرایط درجه دوم بهینگی
Second Order Conditions

$$Z(X(f,q)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$$ اکیداً محدب

جواب نسبت به جریان در کمانها و تقاضاهای مبدأ-مقصد، یگانه است.

جواب نسبت به جریان در مسیرها، یگانه نیست

(جریان تعادل کمانها، می تواند از بسیاری ترکیبات جریان مسیر بدست آید).

یادآوری:

الگوریتم ترکیب محدب (فرانک–ولف):

گام ۰: یافتن یک جواب امکانپذیر X^0

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ \overrightarrow{\nabla Z(X^n)}\ .\ \overrightarrow{y^n}$$

$$s.t.\quad \sum_i h_{ij}\, y_i^n \geq b_j \quad \forall j \in J^n$$

مسئله خطی

گام ۲: α_n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ Z((1-\alpha_n)X^n + \alpha_n\, y^n)$$

$$s.t.\quad 0 \leq \alpha_n \leq 1$$

مسئله تک متغیره

گام ۳: نقطه جدید را بیابید:

$$X^{n+1} = (1-\alpha_n)X^n + \alpha_n\, y^n$$

گام ۴: اگر ضابطه خاتمه برقرار است، پایان. وگرنه $n \leftarrow n+1$ و به گام ۱ بروید.

$$Min\, Z(X(f,q)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} \le \bar{q}_{rs} \quad \forall r,s \quad , f_k^{rs} \ge 0 \quad \forall k,r,s \quad , x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید:

مسئله خطی
LP

$$Min\, Z^n(f) = \sum_{(r,s)\in M} \; \sum_{k\in P_{rs}} \frac{\partial Z(f^n)}{\partial f_k^{rs}} g_k^{rs}$$

$$S.t. \quad \sum_k g_k^{rs} \le \bar{q}_{rs} \qquad \forall (r,s) \in M$$

$$g_k^{rs} \ge 0 \quad \forall k \in P_{rs} \qquad \forall (r,s) \in M$$

$$\frac{\partial Z(f^n)}{\partial f_l^{mn}} = \frac{\partial Z(x(f^n), q(f^n))}{\partial f_l^{mn}} = c_l^{mn}(f^n) - D_{mn}^{-1}(f^n)$$

$$Min\ Z\big(X(f,q)\big) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs}\int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} \le \bar{q}_{rs}\ \ \forall r,s \quad ,f_k^{rs} \ge 0 \quad \forall k,r,s \quad ,x_a = \sum_r\sum_s\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ Z^n(g) = \sum_{(r,s)\in M} \sum_{k\in P_{rs}} \left[{c_k^{rs}}^n - {D_{rs}}^{-1}(q_{rs}^n)\right] g_k^{rs}$$

$$S.t. \quad \sum_k g_k^{rs} \le \bar{q}_{rs} \qquad \forall (r,s)\in M$$

$$g_k^{rs} \ge 0 \quad \forall k \in P_{rs} \qquad \forall (r,s)\in M$$

مسئله خطی
LP

$\left[{c_k^{rs}}^n - {D_{rs}}^{-1}(q_{rs}^n)\right]$ ثابت

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

$$Min\, Z\big(X(f,q)\big) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} \le \bar{q}_{rs} \;\; \forall r,s \quad , f_k^{rs} \ge 0 \;\; \forall k,r,s \quad , x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید: برای هر (r,s) :

$$Min\, Z^n(y) = \sum_{k \in P_{rs}} \left[c_k^{rs^n} - {D_{rs}}^{-1}(q_{rs}^n)\right] g_k^{rs}$$

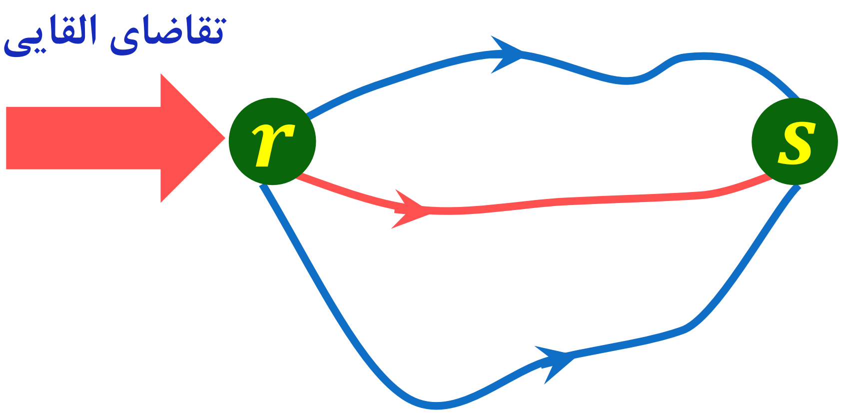
$$S.t. \quad \sum_k g_k^{rs} \le \bar{q}_{rs}$$

$$g_k^{rs} \ge 0 \quad \forall k$$

مسئله خطی
LP

به تعداد
زوج مبدأ-مقصدها

برای کمینه سازی تابع هدف $Z^n(y)$ ،
همه تقاضای القایی rs به مسیر با
کمترین $\left[c_k^{rs^n} - {D_{rs}}^{-1}(q_{rs}^n)\right]$ اختصاص می یابد..



تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

$$Min\, Z\big(X(f,q)\big) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}{}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} \le \bar{q}_{rs} \quad \forall r,s \quad , f_k^{rs} \ge 0 \quad \forall k,r,s \quad , x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید: برای هر (r,s) :

$$Min\, Z^n(y) = \sum_{k \in P_{rs}} \left[c_k^{rs^n} - D_{rs}{}^{-1}(q_{rs}^n) \right] g_k^{rs}$$

$$S.t. \quad \sum_k g_k^{rs} \le \bar{q}_{rs}$$

$$g_k^{rs} \ge 0 \quad \forall k$$

همه یا هیچ

$$if\, c_m^{rs^n} \le D_{rs}{}^{-1}(q_{rs}^n) \quad \rightarrow Set\ g_m^{rs^n} = \bar{q}_{rs} \ , g_k^{rs^n} = 0 \ \ \forall k \ne m$$

$$if\, c_m^{rs^n} > D_{rs}{}^{-1}(q_{rs}^n) \quad \rightarrow Set\ g_k^{rs^n} = 0 \ \ \forall k$$

هیچ تقاضایی از هیچ مسیری بین r و s جابجا نمیشود (تغییر مقصد یا لغو سفر)

$$Min\, Z(X(f,q)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} \leq \bar{q}_{rs} \;\; \forall r,s \;\;\; ,f_k^{rs} \geq 0 \;\;\; \forall k,r,s \;\;\; ,x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

جمع بندی گام ۱ (یافتن بردار جهت) در تکرار n ام:

تخصیص همه یا هیچ $\Rightarrow$ $g_k^{rs,n}$ $\Rightarrow$

$$ {y_a}^n = \sum_{(r,s)} \sum_{k \in P_{rs}} g_k^{rs,n} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a$$

$$ {\vartheta_{rs}}^n = \sum_k g_k^{rs,n} \qquad \forall (rs)$$

$$\mathit{Min}\, Z\big(X(f,q)\big) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} \le \bar{q}_{rs} \quad \forall r,s \quad ,f_k^{rs} \ge 0 \quad \forall k,r,s \quad ,x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۲: α_n را با حل مسئله بیابید:

مسئله تک متغیره

$$\underset{\substack{\alpha_n \\ 0 \le \alpha_n \le 1}}{Min} \quad Z(\alpha) = \sum_a \int_0^{x_a{}^n + \alpha_n (y_a{}^n - x_a{}^n)} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}{}^n + \alpha_n (\vartheta_{rs}{}^n - q_{rs}{}^n)} t_a(\omega)d\omega$$

روش حل: استفاده از روشهای کمینه سازی تک متغیره (روشهای کاهنده بازه و...) یا مشتق گیری (در صورت امکان)

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

$$Min\, Z\big(X(f,q)\big) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} {D_{rs}}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.}\ \sum_k f_k^{rs} \leq \bar{q}_{rs}\ \ \forall r,s\ \ ,f_k^{rs} \geq 0\ \ \forall k,r,s\ \ ,x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

– نقطه جدید (حجم جدید کمانها) را بیابید:

$$x_a^{n+1} = x_a^{n} + \alpha(y_a^{n} - x_a^{n}) \qquad \forall a$$

$$q_{rs}^{n+1} = q_{rs}^{n} + \alpha(\vartheta_{rs}^{n} - q_{rs}^{n}) \quad \forall (rs)$$

– ضابطه همگرایی

نزدیکی زمان سفر OD ها با مقدار متناظر در تابع معکوس تقاضا + نزدیکی زمان سفرهای متوالی

$$\sum_{rs} \frac{\left|{D_{rs}}^{-1}({q_{rs}}^{n}) - {u_{rs}}^{n}\right|}{{u_{rs}}^{n}} + \sum_{rs} \frac{\left|{u_{rs}}^{n} - {u_{rs}}^{n-1}\right|}{{u_{rs}}^{n}} \leq \epsilon$$

الگوریتم حل مسئله UE تقاضای متغیر به روش فرانک ولف

گام ۰: شروع) جواب شدنی اولیه حجم جریان کمانها $\{x_a^1\}$ تقاضا $\{q_{rs}^1\}$ $n \leftarrow 1$

گام ۱: آپدیت) آپدیت زمان سفر کمانها $t_a^n = t_a(x_a^n), \forall a$ محاسبه $D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n)$

گام ۲: یافتن جهت) محاسبه کوتاهترین مسیر (m) برای هر OD بر اساس $\{t_a^n\}$

اجرای قانون تخصیص روبرو: $if\, c_m^{rs^n} \leq D_{rs}{}^{-1}(q_{rs}^n) \rightarrow Set\ g_m^{rs^n} = \bar{q}_{rs}\ , g_k^{rs^n} = 0\ \forall k \neq m$

$if\, c_m^{rs^n} > D_{rs}{}^{-1}(q_{rs}^n) \rightarrow Set\ g_k^{rs^n} = 0\ \forall k$

متغیر کمکی حجم جریان در کمانها $\{y_a^n\}$

متغیر کمکی تقاضا $\{\vartheta_{rs}^n\}$

الگوریتم حل مسئله UE تقاضای متغیر به روش فرانک ولف

گام ۳: بزرگی گام) مقدار متغیر α_n را بیابید.

$$\underset{\substack{\alpha_n \\ 0\le\alpha_n\le1}}{Min}\ Z(\alpha) = \sum_a \int_0^{x_a{}^n+\alpha_n(y_a{}^n-x_a{}^n)} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}{}^n+\alpha_n(\vartheta_{rs}{}^n-q_{rs}{}^n)} t_a(\omega)d\omega$$

گام ۴: نقطه جدید)

$$x_a{}^{n+1} = x_a{}^n + \alpha(y_a{}^n - x_a{}^n) \qquad \forall a$$

$$q_{rs}{}^{n+1} = q_{rs}{}^n + \alpha(\vartheta_{rs}{}^n - q_{rs}{}^n) \quad \forall(rs)$$

گام ۵: تست همگرایی) اگر ضابطه خاتمه ارضا شود، پایان (جواب: $\{x_a^{n+1}\}$ و $\{q_{rs}{}^{n+1}\}$) .

وگرنه $n \leftarrow n+1$ و برو به گام ۱.

تعادل استفاده کننده با تقاضای متغیر

UE	Fixed Demand Problem	Variable Demand Problem
هدف	می نی مم کردن زمان سفر تک تک افراد (تقاضای مبادی و مقاصد ثابت)	می نی مم کردن زمان سفر تک تک افراد همزمان با ارضا نمودن ماکزیمم تقاضای بین هر مبدأ و مقصد
مدل	$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$ {s.t.} $\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} = (cte)\ , f_k^{rs} \geq 0$	$Min\ Z(X,q) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$ {s.t.} $\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} = D_{rs}(u_{rs})\quad , f_k^{rs} \geq 0\quad , q_{rs} \geq 0$
شروط کوهن تاکر	$f_k^{rs}\,(f_k^{rs} - u_{rs}) = 0$ $Expr1 \geq 0\ , Expr2 \geq 0$ (اصول واردروپ) $\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$	$f_k^{rs}\,(f_k^{rs} - u_{rs}) = 0$ $Expr1 \geq 0\ , Expr2 \geq 0$ (اصول واردروپ) $q_{rs}\,[u_{rs} - D_{rs}^{-1}(q_{rs})] = 0\quad , Expr1 \geq 0\ , Expr2 \geq 0$ $\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$

UE	Fixed Demand Problem	Variable Demand Problem
حل: الگوریتم ترکیب محدب	Step 0: Initialization based on $t_a = t_a(0) \rightarrow x_a^1$	Step 0: Initialization based on $t_a = t_a(0) \rightarrow x_a^1$, q_{rs}^1
	Step 1: Set $t_a{}^n = t_a(x_a{}^n);\quad \forall a$	Step 1: Set $t_a{}^n = t_a(x_a{}^n);\quad \forall a$ Compute $D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n);\quad \forall r,s$
	Step 2: Direction Finding based on $\{t_a{}^n\}$ $Min\ z^n(g^{rs}) = \sum_k c_k^{rs}.g_k^{rs}$ $s.t. \sum_k g_k^{rs} = q_{rs}\ , g_k^{rs} \geq 0$	Step 2: Direction Finding based on $\{t_a{}^n\}$ $Min\ z^n(g^{rs}) = \sum_k [c_k^{rs} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n)].g_k^{rs}$ $s.t. \sum_k g_k^{rs} \leq \bar{q}_{rs}\ , g_k^{rs} \geq 0$
	$if\ \ c_m^{rs} \leq c_k^{rs} \ \rightarrow \ g_m^{rs} = q_{rs} \quad \forall k$ $g_k^{rs} = 0 \quad for\ all\ other\ paths$	$if\ \ c_m^{rs^n} \leq D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n) \ \rightarrow \ g_m^{rs} = \bar{q}_{rs}\ ,\ g_k^{rs} = 0 \quad \forall k \neq m$ $if\ \ c_m^{rs^n} > D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n) \ \rightarrow \ g_k^{rs} = 0 \quad \forall k$
	Output: $\{y_a{}^n\}$ $\quad y_a{}^n = \sum_k \sum_{rs} g_k^{rs^n}.\delta_{a,k}^{rs}$	Output: $\{y_a{}^n\}$, $\{v_{rs}{}^n\}$ $\quad y_a{}^n = \sum_k \sum_{rs} g_k^{rs^n}.\delta_{a,k}^{rs} \quad v_{rs}{}^n = \sum_k g_k^{rs^n}$
	Step 3: Move Size: α $Min \sum_a \int_0^{x_a{}^n + \alpha(y_a{}^n - x_a{}^n)} t_a(\omega)d\omega$ $s.t.\quad 0 \leq \alpha \leq 1$	Step 3: Move Size: α $Min \sum_a \int_0^{x_a{}^n + \alpha(y_a{}^n - x_a{}^n)} t_a(\omega)d\omega$ $- \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}{}^n + \alpha(v_{rs}{}^n - q_{rs}{}^n)} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$ $s.t.\quad 0 \leq \alpha \leq 1$
	Step 4: Update: $x_a^{n+1} = x_a^n + \alpha_n(y_a{}^n - x_a^n)$	Step 4: Update: $x_a^{n+1} = x_a^n + \alpha_n(y_a{}^n -$
	Step 5: Converge Criteria	Step 5: Converge Criteria

منابع

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 6)