دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

حل مسئله تعادل استفاده کننده

(روش ترکیب محدب)

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فهرست:

یادآوری:

مسئله تخصیص ترافیک در شرایط تعادل استفاده کننده (با تقاضای ثابت):

Beckmann Model

$$\boldsymbol{Min\ Z(X) = \sum_{a} \int_{0}^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega}$$

S.t.

$$\boldsymbol{\sum_{k} f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall r, s}$$

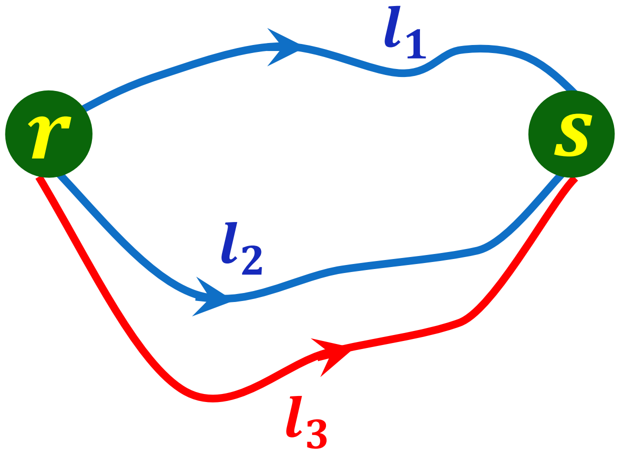
$$\boldsymbol{f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k, r, s}$$

محدودیت تعریفی:

$$\boldsymbol{x_a = \sum_{r} \sum_{s} \sum_{k} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}}$$

یادآوری:

u_{rs} : زمان (هزینه) سفر کوتاهترین مسیر بین زوج مبدأ-مقصد rs



شرایط کوهن-تاکر

$$\begin{cases} f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 & \forall k, r, s \\ c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 & \forall k, r, s \\ \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} & \forall (r, s) \\ f_k^{rs} \geq 0 & \forall k, r, s \end{cases}$$

$$If \quad f_{l_1}^{rs} > 0 \rightarrow c_{l_1}^{rs} = u_{rs}$$

$$If \quad f_{l_2}^{rs} > 0 \rightarrow c_{l_2}^{rs} = u_{rs}$$

$$If \quad f_{l_3}^{rs} = 0 \rightarrow c_{l_3}^{rs} \geq u_{rs}$$

شرایط تخصیص UE:

- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده شده یک OD با هم برابر است.
- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده نشده OD بزرگتر (یا مساوی) است.

یادآوری:

الگوریتم ترکیب محدب (فرانک-ولف):

گام ۰: یافتن یک جواب امکانپذیر X^0

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ \overrightarrow{\nabla Z(X^n)}\ .\ \overrightarrow{y^n}$$

$$s.t.\quad \sum_i h_{ij}\, y_i^n \geq b_j \quad \forall j \in J^n$$

مسئله خطی

گام ۲: α_n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ Z((1-\alpha_n)X^n + \alpha_n\, y^n)$$

$$s.t.\quad 0 \leq \alpha_n \leq 1$$

مسئله تک متغیره

گام ۳: نقطه جدید را بیابید:

$$X^{n+1} = (1-\alpha_n)X^n + \alpha_n\, y^n$$

گام ۴: اگر ضابطه خاتمه برقرار است، پایان. وگرنه $n \leftarrow n+1$ و به گام ۱ بروید.

$$Min\ Z(X)=\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs}=q_{rs}\ \ \forall r,s\ \ ,f_k^{rs}\geq 0\ \ \forall k,r,s\ \ ,x_a=\sum_r\sum_s\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$$

$$\overrightarrow{\nabla Z(X^n)}=\overrightarrow{\left(\dots\ \frac{\partial}{\partial x_a}Z(X^n)\ \ \dots\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_a}Z(X^n)=\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\sum_b\int_0^{x_b^n}t_b(\omega)d\omega\right)=\frac{\partial}{\partial x_a}\int_0^{x_a^n}t_a(\omega)d\omega=t_a(x_a^n)\ \ =t_a^n$$

$t_a^n=t_a(x_a^n)$ ثابت: زمان سفر کمان a در تکرار n ام

$$Min\ Z^n(y)=\overrightarrow{\nabla Z(X^n)}\,.\overrightarrow{y^n}=Min\ \overrightarrow{(\dots t_a^n\dots)}.\overrightarrow{y^n}=Min\sum_a t_a^n.y_a$$

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}\ \ \forall r,s \ \ , f_k^{rs} \geq 0 \ \ \forall k,r,s \ \ , x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ Z^n(y) = \sum_a t_a^n\, y_a$$

$$S.t. \ \sum_k g_k^{rs} = q_{rs} \ \ \forall r,s$$

$$g_k^{rs} \geq 0 \ \ \forall k,r,s$$

مسئله خطی
LP

y_a متغیر کمکی جریان در کمان a

$$y_a = \sum_r \sum_s \sum_k g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

g_k^{rs} متغیر کمکی جریان در مسیر k ام بین مبدأ–مقصد rs

حل مسئله تعادل استفاده کننده

$$y_a{}^n = y_a = \sum_{(r,s)\in M} \sum_{k\in P_{rs}} g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

$$Z^n(y) = \sum_{a\in A} t_a^n \, y_a = \sum_{a\in A} t_a^n \left[\sum_{(r,s)\in M} \sum_{k\in P_{rs}} g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \right] = \sum_{(r,s)\in M} \sum_{k\in P_{rs}} \sum_{a\in A} t_a^n \, g_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

$$= \sum_{(r,s)\in M} \sum_{k\in P_{rs}} g_k^{rs} \underbrace{\left[\sum_{a\in A} t_a^n \, \delta_{a,k}^{rs} \right]}_{c_k^{rs,n}} = \sum_{(r,s)\in M} \sum_{k\in P_{rs}} c_k^{rs,n} g_k^{rs}$$

$c_k^{rs,n}$ زمان سفر مسیر k ام بین r و s در تکرار n ام: ثابت

(مجموع زمانهای سفر کمانهای مسیر k ام بین r و s به ازای X^n: ثابت)

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}\ \forall r,s \quad ,f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad ,x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ Z^n(y) = \sum_{(r,s)\in M} \sum_{k\in P_{rs}} c_k^{rs,n} g_k^{rs}$$

$$S.t. \quad \sum_k g_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall(r,s) \in M$$

$$g_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in P_{rs} \qquad \forall(r,s) \in M$$

مسئله خطی
LP

- ✓ مسئله، به ازای یک (r,s) مشخص، مسئله روی همه مسیرهای آن (اعضای مجموعه P_{rs}) جدایی پذیر است.
- ✓ به جای یافتن کمینه مجموع المانها، می توان مجموع کمینه ی تک تک المانها را لحاظ نمود.

حل مسئله تعادل استفاده کننده

روش ترکیب محدب

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.}\ \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}\ \ \forall r,s\ \ ,f_k^{rs} \geq 0\ \ \forall k,r,s\ \ ,x_a = \sum_r\sum_s\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید: برای هر (r,s) :

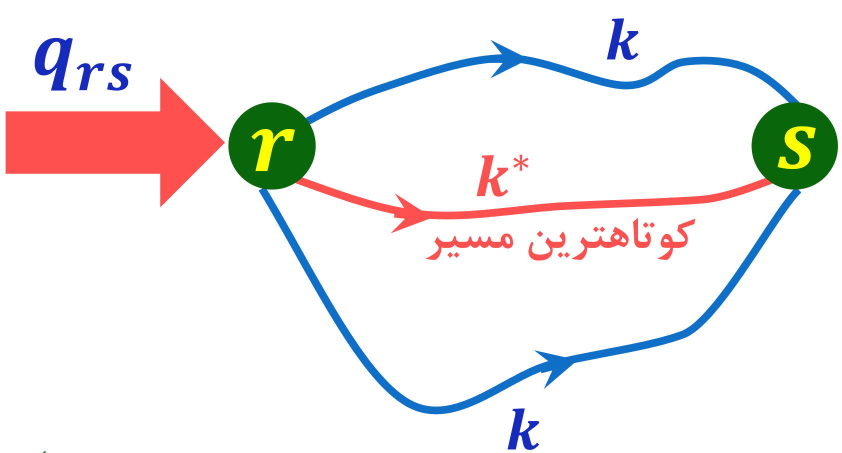
$$Min\ Z^n(y) = \sum_{k\in P_{rs}} c_k^{rs,n} g_k^{rs}$$

$$S.t.\ \ \sum_k g_k^{rs} = q_{rs}$$

$$g_k^{rs} \geq 0\ \ \ \forall k \in P_{rs}$$

مسئله خطی
LP

به تعداد
زوج مبدأ-مقصدها



برای کمینه سازی تابع هدف $Z^n(y)$ ،
تقاضای q_{rs} باید از کدام مسیر(ها) عبور کند؟

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r,s \quad ,f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad ,x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید: برای هر (r,s) :

$$Min\ Z^n(y) = \sum_{k \in P_{rs}} c_k^{rs,n} g_k^{rs}$$

$$S.t. \quad \sum_k g_k^{rs} = q_{rs}$$

$$g_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in P_{rs}$$

تخصیص به کوتاهترین مسیر

(در تکرار n ام) جواب مسئله $g_k^{rs} = \begin{cases} q_{rs} & if\ \ k = k^* \\ 0 & if\ \ k \neq k^* \end{cases}$

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}\ \forall r,s\ \ ,f_k^{rs} \geq 0\ \ \forall k,r,s\ \ ,x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید: برای هر (r,s) :

$$Min\ Z^n(y) = \sum_{k \in P_{rs}} c_k^{rs,n} g_k^{rs}$$

$$S.t.\ \ \sum_k g_k^{rs} = q_{rs}$$

$$g_k^{rs} \geq 0\ \ \ \forall k \in P_{rs}$$

تخصیص همه یا هیچ
برای کل شبکه

⟺

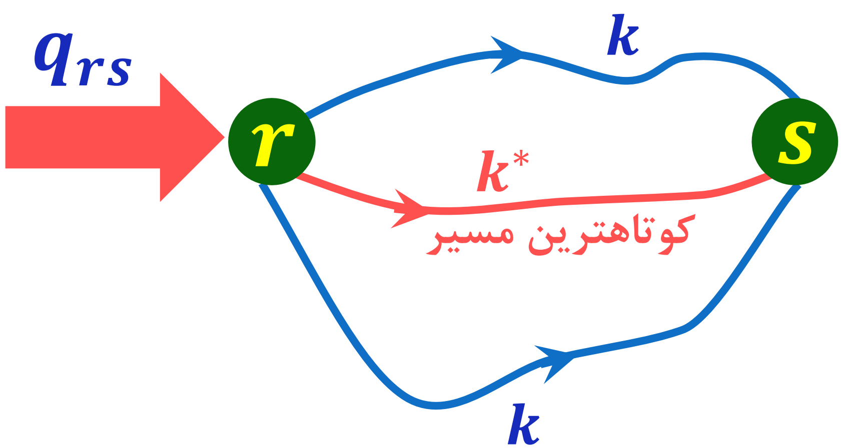
تخصیص q_{rs} به
کوتاهترین مسیر بین هر زوج (r,s)

$$Min\ Z(X)=\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.}\ \sum_k f_k^{rs}=q_{rs}\ \ \forall r,s\ \ ,f_k^{rs}\geq 0\ \ \forall k,r,s\ \ ,x_a=\sum_r\sum_s\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$$

جمع بندی گام ۱ (یافتن بردار جهت) در تکرار n ام:

تخصیص همه یا هیچ $\rightarrow$ g_k^{rs} $\rightarrow$ $y_a{}^n=\sum_{(r,s)}\sum_{k\in P_{rs}}g_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{d^n}=\overrightarrow{y^n}-\overrightarrow{X^n}$



یادآوری:

الگوریتم ترکیب محدب (فرانک-ولف):

گام ۰: یافتن یک جواب امکانپذیر X^0

گام ۱: y^n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ \overrightarrow{\nabla Z(X^n)}\ .\ \overrightarrow{y^n}$$

$$s.t.\quad \sum_i h_{ij}\, y_i^n \geq b_j \quad \forall j \in J^n$$

مسئله خطی

گام ۲: α_n را با حل مسئله بیابید:

$$Min\ Z((1-\alpha_n)X^n + \alpha_n\, y^n)$$

$$s.t.\quad 0 \leq \alpha_n \leq 1$$

مسئله تک متغیره

گام ۳: نقطه جدید را بیابید:

$$X^{n+1} = (1-\alpha_n)X^n + \alpha_n\, y^n$$

گام ۴: اگر ضابطه خاتمه برقرار است، پایان. وگرنه $n \leftarrow n+1$ و به گام ۱ بروید.

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}\ \forall r,s \quad ,f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad ,x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$$

گام ۲: α_n را با حل مسئله بیابید:

مسئله تک متغیره

$$\underset{\substack{\alpha_n \\ 0\leq\alpha_n\leq 1}}{Min}\ Z\left(X^{n+1}\right) = \underset{\substack{\alpha_n \\ 0\leq\alpha_n\leq 1}}{Min} \sum_a \int_0^{x_a{}^{n+1}} t_a(\omega)d\omega = \underset{\substack{\alpha_n \\ 0\leq\alpha_n\leq 1}}{Min} \sum_a \int_0^{x_a{}^n+\alpha_n(y_a{}^n-x_a{}^n)} t_a(\omega)d\omega$$

روش حل: استفاده از روشهای کمینه سازی تک متغیره (روشهای کاهنده بازه و...) یا مشتق گیری (در صورت امکان)

می دانیم:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(\omega,\alpha)d\omega = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial f(\omega,\alpha)}{\partial\alpha}d\omega + f(h(\alpha),\alpha)\frac{dh(\alpha)}{d\alpha} - f(g(\alpha),\alpha)\frac{dg(\alpha)}{d\alpha}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\sum_a \int_0^{x_a{}^n+\alpha_n(y_a{}^n-x_a{}^n)} t_a(\omega)d\omega = 0 + \sum_a (y_a{}^n - x_a{}^n)t_a(x_a{}^n + \alpha_n(y_a{}^n - x_a{}^n)) - 0 = 0$$

$$\alpha = \ \dots$$

گام ۳: نقطه جدید (حجم جدید کمانها) را بیابید:

$$x_a{}^{n+1} = x_a{}^n + \alpha(y_a{}^n - x_a{}^n) \ \ \forall a$$

ضابطه همگرایی:

۱ نزدیکی کوتاهترین زمان سفر OD در دو تکرار متوالی

$$\sum_{rs} \frac{\left|{u_{rs}}^{n} - {u_{rs}}^{n-1}\right|}{{u_{rs}}^{n}} \leq \epsilon$$

۲ اختلاف نسبی حجم کمانها در دو تکرار متوالی

$$\frac{\frac{\sum_a \sqrt{({x_a}^{n+1} - {x_a}^{n})^2}}{n}}{\frac{\sum_a {x_a}^{n}}{n}} < \epsilon'$$

الگوریتم حل مسئله UE به روش فرانک ولف (ترکیب محدب)

گام ۰: شروع) اجرای تخصیص AON بر اساس $t_a^0 = t_a(0), \forall a$ حجم جریان کمانها $\{x_a^1\}$ $n \leftarrow 1$

گام ۱: آپدیت) آپدیت زمان سفر کمانها $t_a^n = t_a(x_a^n), \forall a$

گام ۲: یافتن جهت) اجرای تخصیص AON بر اساس $\{t_a^n\}$ حجم کمکی جریان در کمانها $\{y_a^n\}$

گام ۳: بزرگی گام) مقدار متغیر α_n را بیابید.

$$\underset{0 \le \alpha_n \le 1}{Min} \sum_a \int_0^{x_a{}^n + \alpha_n (y_a{}^n - x_a{}^n)} t_a(\omega) d\omega$$

گام ۴: نقطه جدید)

$$x_a{}^{n+1} = x_a{}^n + \alpha (y_a{}^n - x_a{}^n), \qquad \forall a$$

گام ۵: تست همگرایی) اگر ضابطه خاتمه ارضا شود، پایان (جواب: $\{x_a^{n+1}\}$) . وگرنه $n \leftarrow n + 1$ و برو به گام ۱.

مقایسه الگوریتم محدودیت ظرفیت با الگوریتم فرانک ولف:

هر دو مشابه با یکدیگرند. با این تفاوت که:

در روش محدودیت ظرفیت، مقدار متغیر α_n همواره ثابت و برابر با ۱ در نظر گرفته می شود..

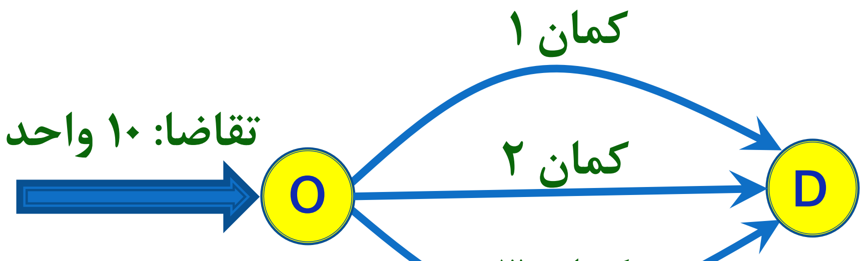
می توان با اصلاح ساده در الگوریتم محدودیت ظرفیت، به الگوریتم فرانک ولف (حل مسئله UE) رسید.

مثال:

$$t_1(x_1) = 10\left[1 + 0.15\left(\frac{x_1}{2}\right)^4\right]$$

$$t_2(x_2) = 20\left[1 + 0.15\left(\frac{x_2}{2}\right)^4\right]$$

$$t_3(x_3) = 25\left[1 + 0.15\left(\frac{x_3}{2}\right)^4\right]$$



$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

Capacity Restraint الگوریتم

شماره تکرار	گام	کمان۱	کمان۲	کمان۳
۰	شروع	$t_1^0 = 10$ $x_1^0 = 10$	$t_2^0 = 20$ $x_2^0 = 0$	$t_3^0 = 25$ $x_3^0 = 0$
۱	آپدیت بارگذاری	$t_1^1 = 947$ $x_1^1 = 0$	$t_2^1 = 20$ $x_2^1 = 10$	$t_3^1 = 25$ $x_3^1 = 0$
۲	آپدیت بارگذاری	$t_1^2 = 10$ $x_1^2 = 10$	$t_2^2 = 137$ $x_2^2 = 0$	$t_3^2 = 25$ $x_3^2 = 0$
۳	آپدیت بارگذاری	$t_1^3 = 947$ $x_1^3 = 0$	$t_2^3 = 20$ $x_2^3 = 10$	$t_3^3 = 25$ $x_3^3 = 0$

...

حل مسئله تعادل استفاده کننده

روش ترکیب محدب

الگوریتم Convex Combination

شماره تکرار	گام	کمان۱	کمان۲	کمان۳	تابع هدف	بزرگی گام
۰	شروع	$t_1^0 = 10$	$t_2^0 = 20$	$t_3^0 = 25$		
		$x_1^1 = 10$	$x_2^1 = 0$	$x_3^1 = 0$		
۱	آپدیت	$t_1^1 = 947$	$t_2^1 = 20$	$t_3^1 = 25$	1975	
	جهت	$y_1^1 = 0$	$y_2^1 = 10$	$y_3^1 = 0$		$\alpha_1 = 0.596$
	نقطه جدید	$x_1^2 = 4.04$	$x_2^2 = 5.96$	$x_3^2 = 0$		
۲	آپدیت	$t_1^2 = 35$	$t_2^2 = 35$	$t_3^2 = 25$	197	
	جهت	$y_1^2 = 0$	$y_2^2 = 0$	$y_3^2 = 10$		$\alpha_2 = 0.161$
	نقطه جدید	$x_1^3 = 3.39$	$x_2^3 = 5$	$x_3^3 = 1.61$		
۳	آپدیت	$t_1^3 = 22.3$	$t_2^3 = 27.3$	$t_3^3 = 35.3$	189.9	
	جهت	$y_1^3 = 10$	$y_2^3 = 0$	$y_3^3 = 0$		$\alpha_3 = 0.035$
	نقطه جدید	$x_1^4 = 3.62$	$x_2^4 = 4.83$	$x_3^4 = 1.55$		
۴	آپدیت	$t_1^2 = 26.1$	$t_2^2 = 26.3$	$t_3^2 = 25.3$	189.4	
	جهت	$y_1^2 = 0$	$y_2^2 = 0$	$y_3^2 = 10$		$\alpha_4 = 0.02$
	نقطه جدید	$x_1^3 = 3.54$	$x_2^3 = 4.73$	$x_3^3 = 1.72$		
۵	آپدیت	$t_1^3 = 24.8$	$t_2^3 = 25.8$	$t_3^3 = 25.4$	189.3	
	جهت	$y_1^3 = 10$	$y_2^3 = 0$	$y_3^3 = 0$		$\alpha_5 = 0.007$
	نقطه جدید	$x_1^4 = 3.59$	$x_2^4 = 4.7$	$x_3^4 = 1.71$		
	آپدیت	$t_1^3 = 25.6$	$t_2^3 = 25.7$	$t_3^3 = 25.4$	189.3	

حل مسئله تعادل استفاده کننده روش ترکیب محدب

تعداد تکرارهای مختلف روش ترکیب محدب:

- ✓ در شبکه های نامتراکم (Uncongested)

همگرایی سریع تر (احجام تعادلی در بخش اول توابع عملکرد کمانها)

- ✓ در شبکه های متراکم (Congested)

با یک تغییر کوچک، مقادیر تابع هدف تغییر زیاد دارند.

تعداد مسیرهای مبدأ-مقصد در آنها زیاد است. پس برنامه باید تلاش بیشتری کند تا زمانهای سفر همه مسیرها را برابر نماید.

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 5)