دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

مروری بر برخی الگوریتم های بهینه سازی

مسائل چندمتغیره با محدودیت

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فهرست:

کمینه سازی با محدودیت

بنحوی که: $Z(X^{n+1}) < Z(X^n)$ $\qquad$ $X^{n+1} = X^n + \alpha_n \overrightarrow{d^n}$

سوال: α_n و $\overrightarrow{d^n}$ چه باشند؟

با لحاظ حفظ امکانپذیری (Feasibility)

کمینه سازی با محدودیت

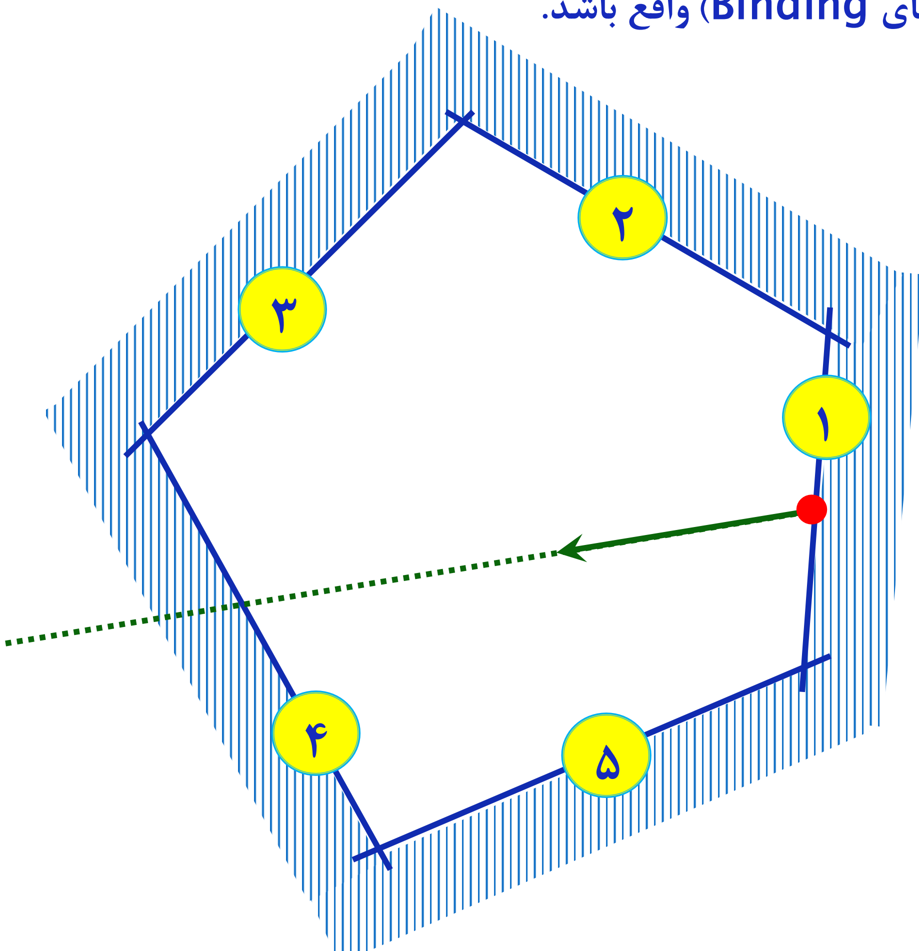
تعیین α_n (بزرگی گام)

$$Min\ Z(X)$$
$$s.t.$$
$$g_j(X) \geq b_j\ \ \forall j$$

فروض: جهت حرکت d^n معلوم است.

محدودیت ها خطی هستند: $\sum_i h_{ij} X_i^n \geq b_j$.

نقطه X^n (نقطه جواب جاری) روی مرز ناحیه امکانپذیر (محدودیتهای Binding) واقع باشد.



در نقطه X^n :

✓ دسته ای از محدودیت ها Binding هستند.

$$\sum_i h_{ij} X_i^n = b_j \quad \forall j \in J^n$$

مجموعه محدودیتهای Binding جواب X^n

✓ مابقی محدودیت ها Non-binding هستند.

$$\sum_i h_{ij} X_i^n > b_j \quad \forall j \notin J^n$$

کمینه سازی با محدودیت

تعیین α_n (بزرگی گام)

$$Min\ Z(X)$$
$$s.t.$$
$$g_j(X) \geq b_j \quad \forall j$$

مسئله: یافتن کمینه $Z\left(X^{n+1}\right)$ با حفظ امکانپذیری در جهت معلوم d^n

۱

$$\sum_i h_{ij} X_i^n > b_j \quad \forall j \notin J^n$$

نقطه بعدی $\left(X^{n+1}\right)$ باید امکانپذیر باشد:
محدودیت های Non-binding نباید نقض شوند:

$$\sum_i h_{ij} X_i^{n+1} \overset{\text{باید}}{\geq} b_j \quad \forall j \notin J^n$$

۲

$$\sum_i h_{ij} X_i^{n+1} = \sum_i h_{ij} \left(X_i^n + \alpha_n d_i^n\right) = \sum_i h_{ij} X_i^n + \alpha_n \underline{\sum_i h_{ij} d_i^n} \geq b_j \quad \forall j \notin J^n$$

برای برخی از دسته محدودیت های $\sum_i h_{ij} d_i^n \geq 0 : j \notin J^n$ ⟸ ۲ حتما برقرار است.

برای برخی از دسته محدودیت های $\sum_i h_{ij} d_i^n < 0 : j \notin J^n$ ⟸ ۲ باید برقرار شود.

کمینه سازی با محدودیت

تعیین α_n (بزرگی گام)

$$Min\ Z(X)$$
$$s.t.$$
$$g_j(X) \geq b_j \quad \forall j$$

مسئله: یافتن کمینه $Z\left(X^{n+1}\right)$ با حفظ امکانپذیری در جهت معلوم d^n

۲

$$\sum_i h_{ij} X_i^{n+1} = \sum_i h_{ij} (X_i^n + \alpha_n d_i^n) = \sum_i h_{ij} X_i^n + \alpha_n \underline{\sum_i h_{ij} d_i^n} \geq b_j \quad \forall j \notin J^n$$

$$\sum_i h_{ij} d_i^n < 0 \ \forall j \in \tilde{J}^n \Rightarrow \alpha_n \leq \frac{b_j - \sum_i h_{ij} X_i^n}{\sum_i h_{ij} d_i^n}$$

$$\alpha_n^{Max} = \underset{\forall j \in \tilde{J}^n}{Min} \frac{b_j - \sum_i h_{ij} X_i^n}{\sum_i h_{ij} d_i^n}$$

تعیین α_n
(بزرگی گام)

$$Min\ Z(X^n + \alpha_n d^n)$$
$$s.t.$$
$$0 \leq \alpha_n \leq \alpha_n^{Max}$$

کمینه سازی با محدودیت

تعیین جهت کاهشی امکانپذیر $\overrightarrow{d^n}$

فروض:

محدودیت ها خطی هستند: $\sum_i h_{ij} X_i^n \geq b_j$.

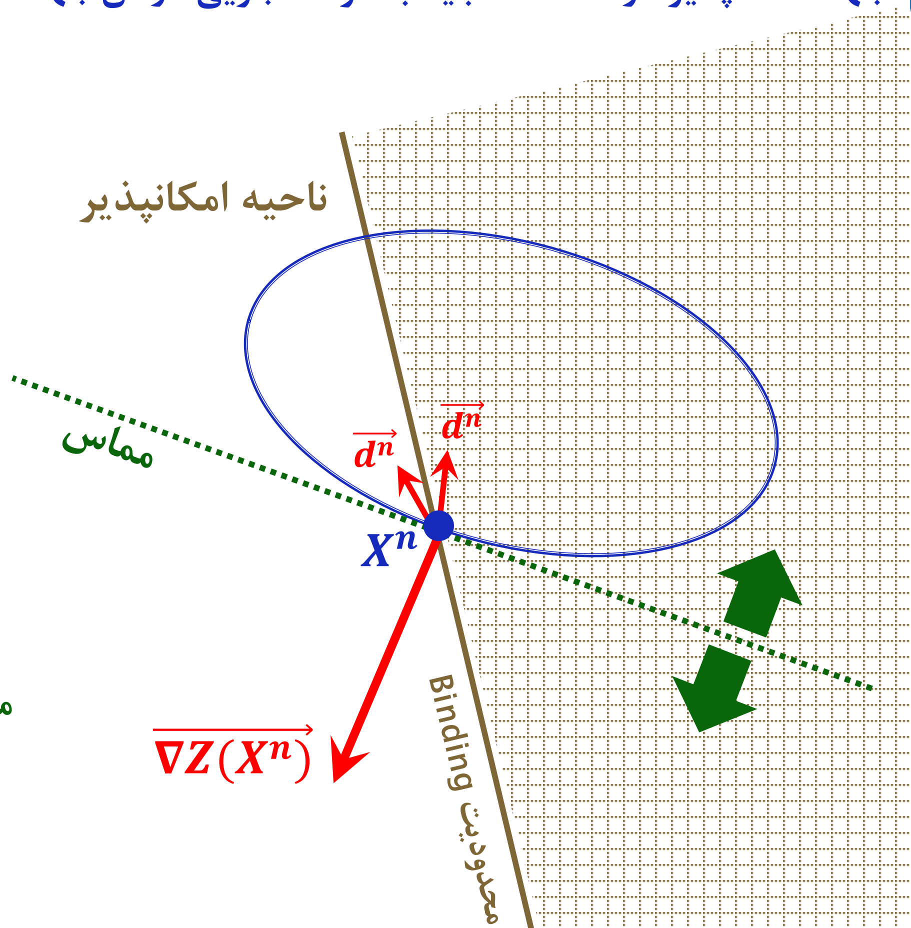
نقطه X^n (نقطه جواب جاری) روی محدودیتهای Binding واقع باشد.

جهت امکانپذیر: از نقطه X^n باید با حرکت جزیی در آن جهت، همچنان در ناحیه امکانپذیر باشیم.

جهت کاهشی: یک طرف خط مماس (زاویه بین ∇Z و آن جهت، بین $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ باشد).

جهت امکانپذیر: یک طرف محدودیت Binding

$$\sum_i h_{ij} \left(X_i^n + \underbrace{\Delta\alpha}_{\text{گام کوچک}} . d_i^n\right) \overset{\text{باید}}{\geq} b_j \quad \forall j \in \underbrace{J^n}_{\text{مجموعه محدودیتهای Binding جواب } X^n}$$



کمینه سازی با محدودیت

تعیین جهت کاهشی امکانپذیر $\overrightarrow{d^n}$

$$\underbrace{\sum_i h_{ij} X_i^n}_{b_j} + \Delta\alpha \sum_i h_{ij} d_i^n \geq b_j \quad \forall j \in J^n$$

تنها جهاتی Feasible هستند که:

$$\sum_i h_{ij} d_i^n \geq 0 \quad \forall j \in J^n$$

تعیین جهت
کاهشی امکانپذیر
$\overrightarrow{d^n}$

$$Min\ \overrightarrow{\nabla Z(X^n)}.\overrightarrow{d^n}$$

$$s.t.$$

$$\sum_i h_{ij} d_i \geq 0 \quad \forall j \in J^n$$

$$\sum_i {d_i}^2 = |d| \geq 1$$

نکته: در حالت بدون محدودیت، بردار یکه $\overrightarrow{d^n}$
در جهت عکس گرادیان میشود.
(کسینوس زاویه، برابر با -1)

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 4)