دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

مروری بر برخی الگوریتم های بهینه سازی

مسائل تک متغیره

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فهرست:

- الگوریتمهای کمینه سازی
  - مسائل تک متغیره
    - روشهای کاهنده بازه
      Interval Reduction Methods
      - روش قسمت طلایی
        Golden Section Method
      - روش دوبخشی
        Bi–Section Method
    - روشهای تقریب منحنی
      Curve–Fitting Methods
      - Newton Method
      - False–Position Method
      - Quadratic Approach Method
  - مسائل چند متغیره

مسائل تک متغیره

فرض می شود شرایط زیر برقرارند:

$x \in [a, b]$

a و b محدود

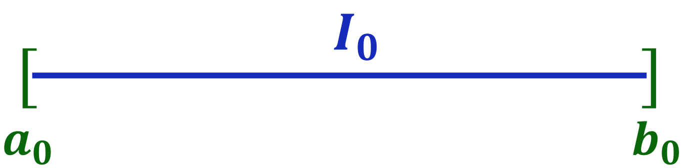
$Z(x)$ پیوسته

$Z(x)$ تک دره ای (ditonic)

نقطه کمینه محدود و یگانه برای $Z(x)$ در بازه $[a,b]$ وجود دارد

روشهای کاهنده بازه

Interval Reduction Methods



بازه $[a_0,b_0]$ در اختیار است.

در هر مرحله به طریقی فاصله را کاهش می دهیم.

مرحله n ام: $[a_n,b_n]$.

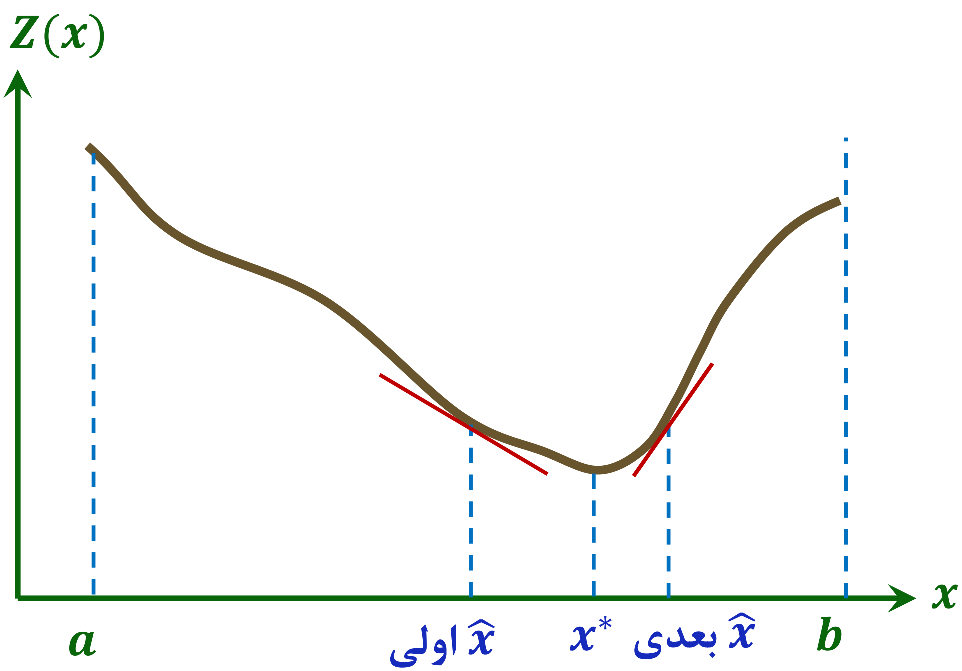
شرط خاتمه: $b_n - a_n$ به حدی کوچک باشد که بتوان گفت نقطه کمینه به تله افتاده است.

روشهای کاهنده بازه ← روش دو بخشی

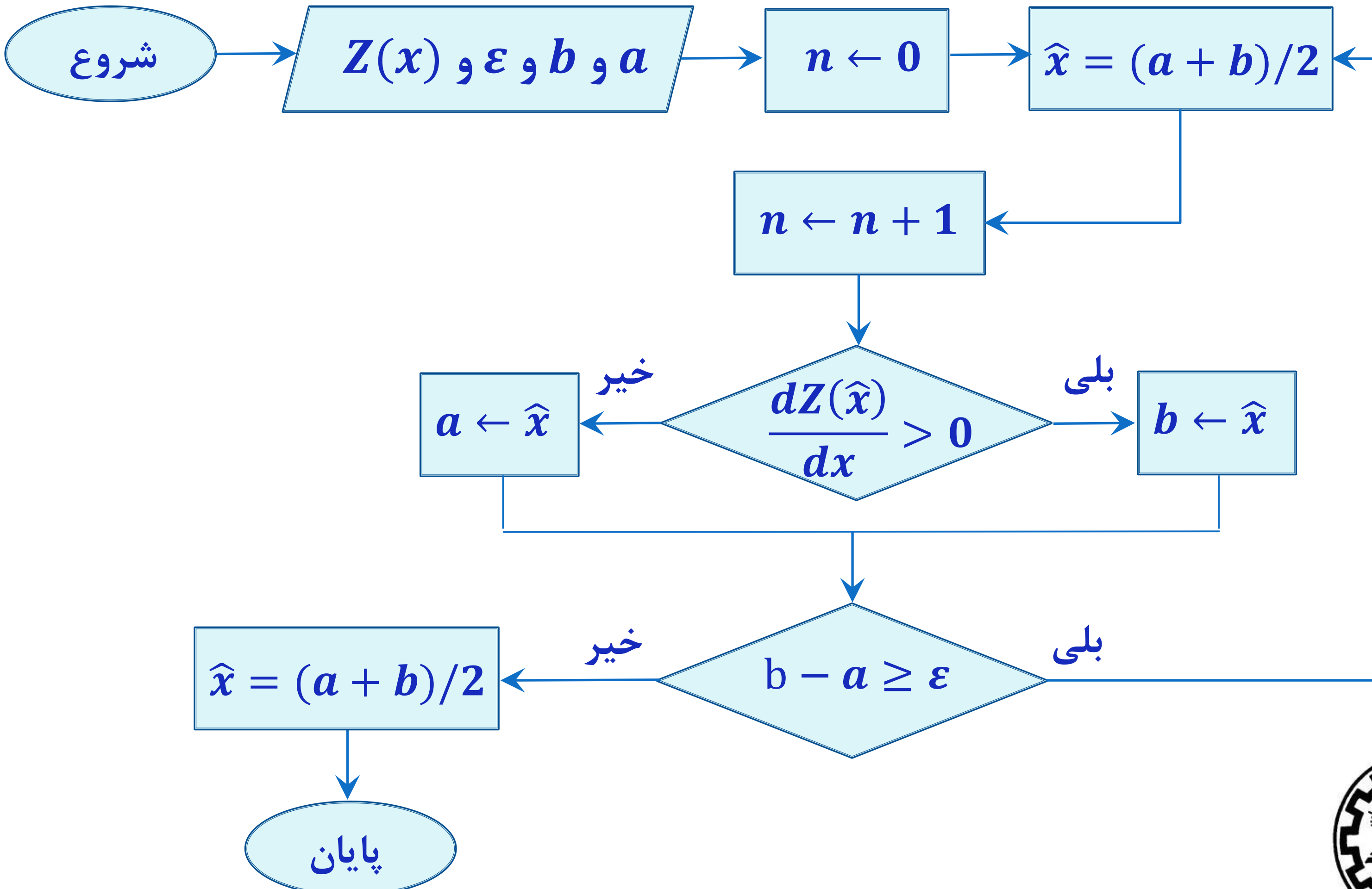
$$\hat{x} = \frac{a+b}{2}$$

اگر $\frac{dZ(\hat{x})}{dx} < 0$ آنگاه $x^* > \hat{x}$ پس $a \leftarrow \hat{x}$

اگر $\frac{dZ(\hat{x})}{dx} > 0$ آنگاه $x^* < \hat{x}$ پس $b \leftarrow \hat{x}$



روشهای کاهنده بازه ← روش دو بخشی



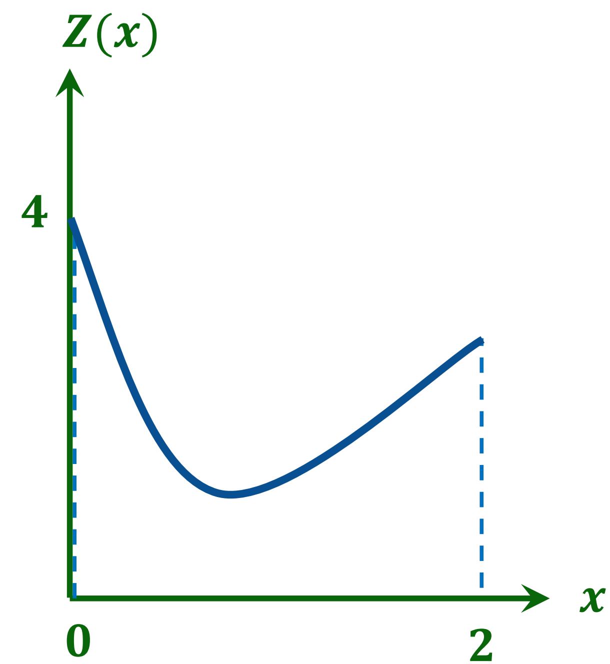
روشهای کاهنده بازه ← روش دو بخشی

یافتن نقطه کمینه تابع؟

$Z(x) = 2x^2 - 3.7x + 4 \qquad \{a, b\} = \{0, 2\} \;, \varepsilon = 0.15$

$$n = 1 \begin{cases} \{a, b\} = \{0, 2\} \\ \hat{x} = 1 \\ dZ(\hat{x})/dx = 0.3 > 0 \\ b - a = 1 > \varepsilon \end{cases} \qquad n = 2 \begin{cases} \{a, b\} = \{0, 1\} \\ \hat{x} = 0.5 \\ dZ(\hat{x})/dx = -1.7 < 0 \\ b - a = 0.5 > \varepsilon \end{cases}$$

$$n = 3 \begin{cases} \{a, b\} = \{0.5, 1\} \\ \hat{x} = 0.75 \\ dZ(\hat{x})/dx = -0.7 < 0 \\ b - a = 0.25 > \varepsilon \end{cases} \qquad n = 4 \begin{cases} \{a, b\} = \{0.75, 1\} \\ \hat{x} = 0.875 \\ dZ(\hat{x})/dx = -0.2 < 0 \\ b - a = 0.125 < \varepsilon \end{cases}$$



$x^* \cong 0.875$

روشهای تقریب منحنی

Curve-Fitting Methods

$Z(x)$ پیوسته

$Z(x)$ تک دره ای (ditonic)

از ویژگی های آخرین جواب (جواب جاری)، بمنظور تولید یک تخمین برای Z(x) استفاده می شود.

معیارهای خاتمه

$$Z(x^{n-1}) - Z(x^n) \le \kappa$$

$$\frac{Z(x^{n-1}) - Z(x^n)}{Z(x^{n-1})} \le \kappa$$

$$x^n - x^{n-1} \le \kappa$$

روشهای تقریب منحنی ← روش نیوتن

تخمین منحنی $Z(x)$ با استفاده از سهمی درجه ۲
(تخمین با استفاده از نقطه x^n تا مشتق دوم)

منحنی فیت شده:
سهمی درجه ۲

بسط درجه ۲ تیلور

$$\hat{Z}(x) = Z(x^n) + \frac{dZ(x^n)}{dx}(x - x^n) + \frac{1}{2}\frac{d^2Z(x^n)}{dx^2}(x - x^n)^2$$

جواب بعدی (x^{n+1}) در نقطه ای است که $\hat{Z}(x)$ را کمینه می کند (نقطه ای که در آن: $\frac{d\hat{Z}(x)}{dx} = 0$):

$$\frac{d\hat{Z}(x)}{dx} = 0 + \frac{dZ(x^n)}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2Z(x^n)}{dx^2} \times 2 \times (x - x^n) = 0 \quad \rightarrow \frac{d^2Z(x^n)}{dx^2} \times (x - x^n) = -\frac{dZ(x^n)}{dx}$$

$$x^{n+1} = x^n - \frac{dZ(x^n)/dx}{d^2Z(x^n)/dx^2}$$

روشهای تقریب منحنی ← روش نیوتن

$$x^{n+1} = x^n - \frac{dZ(x^n)/dx}{d^2Z(x^n)/dx^2}$$

نیاز به دو بار مشتق پذیری وجود دارد.

روشهای تقریب منحنی ← روش False Position

نیاز به یک بار مشتق پذیری وجود دارد.

مقدار $d^2Z(x^n)/dx^2$ تخمین زده می شود.

$$\frac{d^2Z(x^n)}{dx^2} \cong \frac{\frac{dZ(x^{n-1})}{dx} - \frac{dZ(x^n)}{dx}}{x^{n-1} - x^n}$$

$$x^{n+1} = x^n - \frac{dZ(x^n)/dx}{\frac{\frac{dZ(x^{n-1})}{dx} - \frac{dZ(x^n)}{dx}}{x^{n-1} - x^n}}$$

منابع

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 4)