دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

فرمول بندی مساله تخصیص

«مدل ریاضی شرایط بهینگی سیستم System Optimality»

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فهرست:

- ✓ مفهوم تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO
- ✓ مدل ریاضی تعادل (بهینگی) سیستم SO
- ✓ شرایط برابری جوابهای تخصیص UE و تخصیص SO

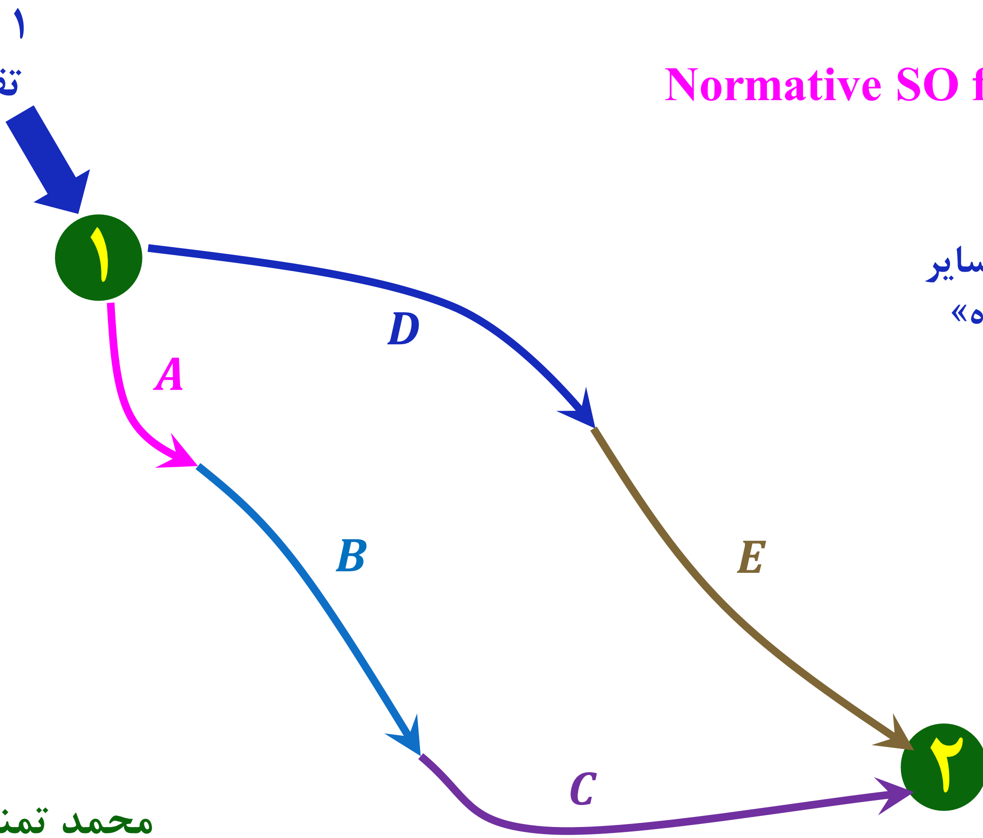
۱ واحد تقاضا به کدام مسیر تخصیص یابد؟ $D-E$ یا $A-B-C$

از منظر تعادل استفاده کننده (UE)   **Descriptive UE flow pattern**

مسیری که در صورت استفاده از آن، فقط زمان سفر خود استفاده کننده کمینه شود.

از منظر بهینگی سیستم (SO)   **Normative SO flow pattern**

مسیری که در صورت استفاده از آن،
«زمان سفر خود استفاده کننده + زمانهای اضافه شده به سایر استفاده کنندگان ناشی از افزوده شدن یک استفاده کننده»
کمینه شود.

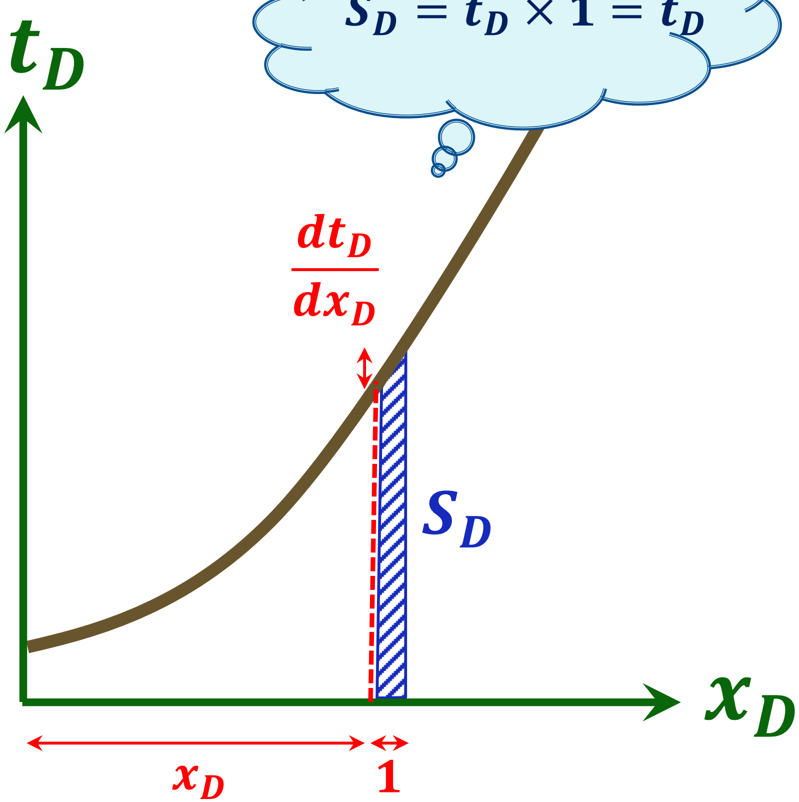


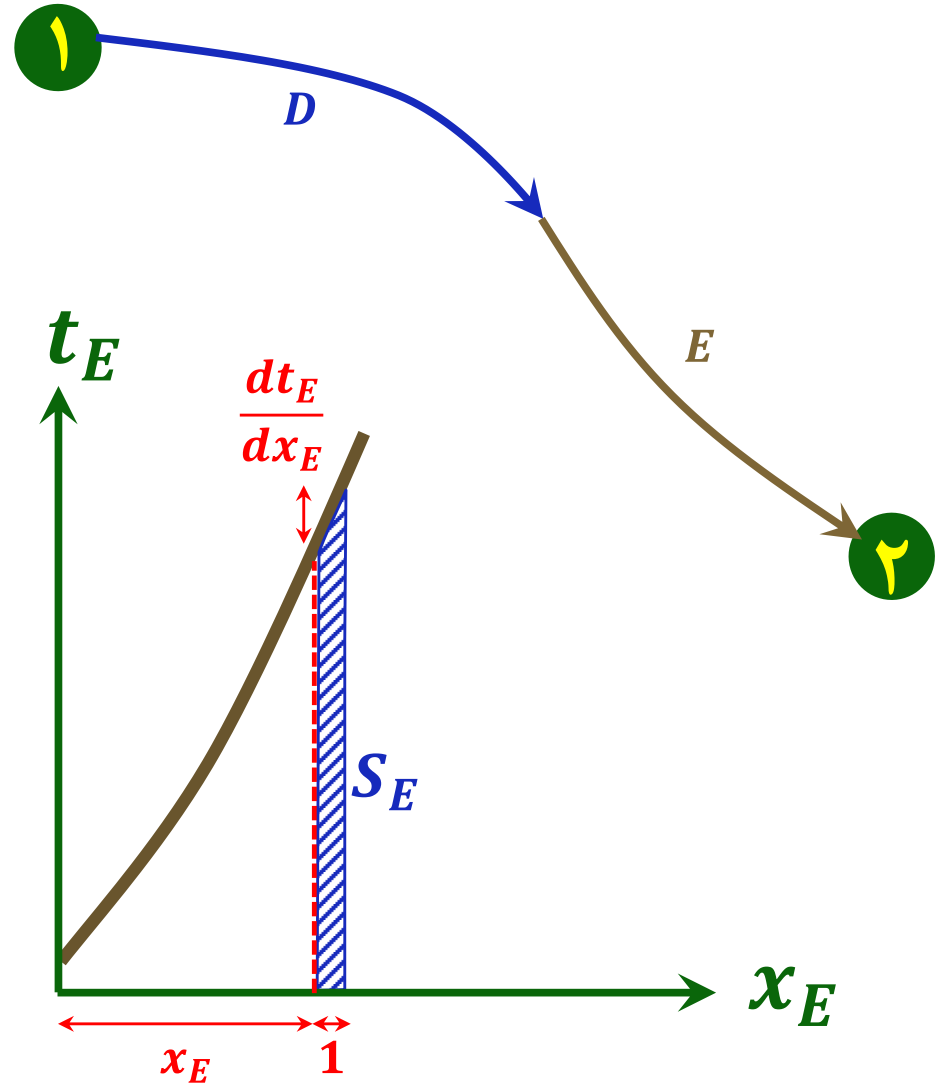
فرمول بندی مساله تخصیص

مفهوم تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO

از منظر استفاده کننده

$$S_D = t_D \times 1 = t_D$$





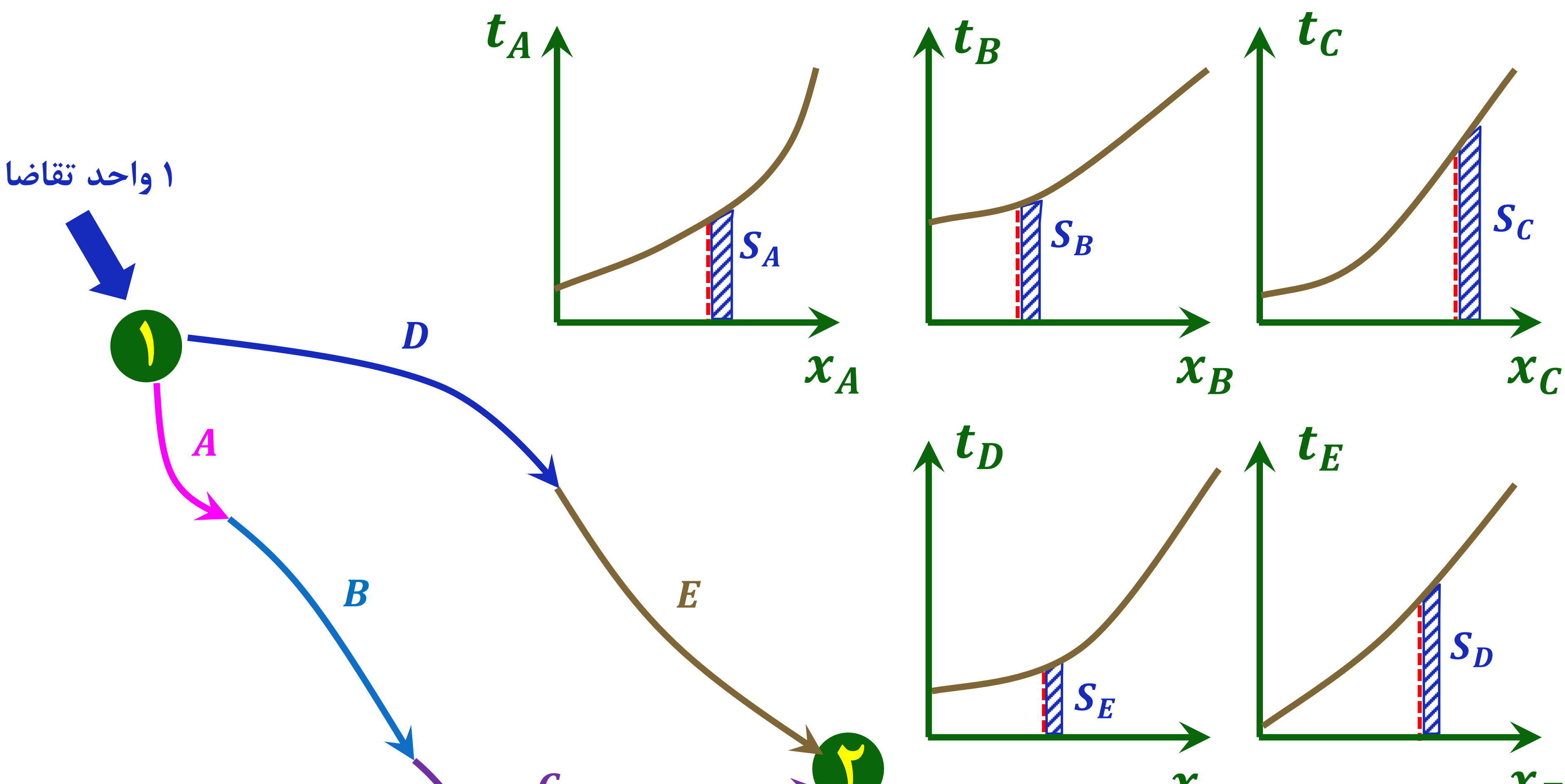
$S_D + S_E$ زمان سفر استفاده کننده از مسیر

مفهوم تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO

از منظر استفاده کننده

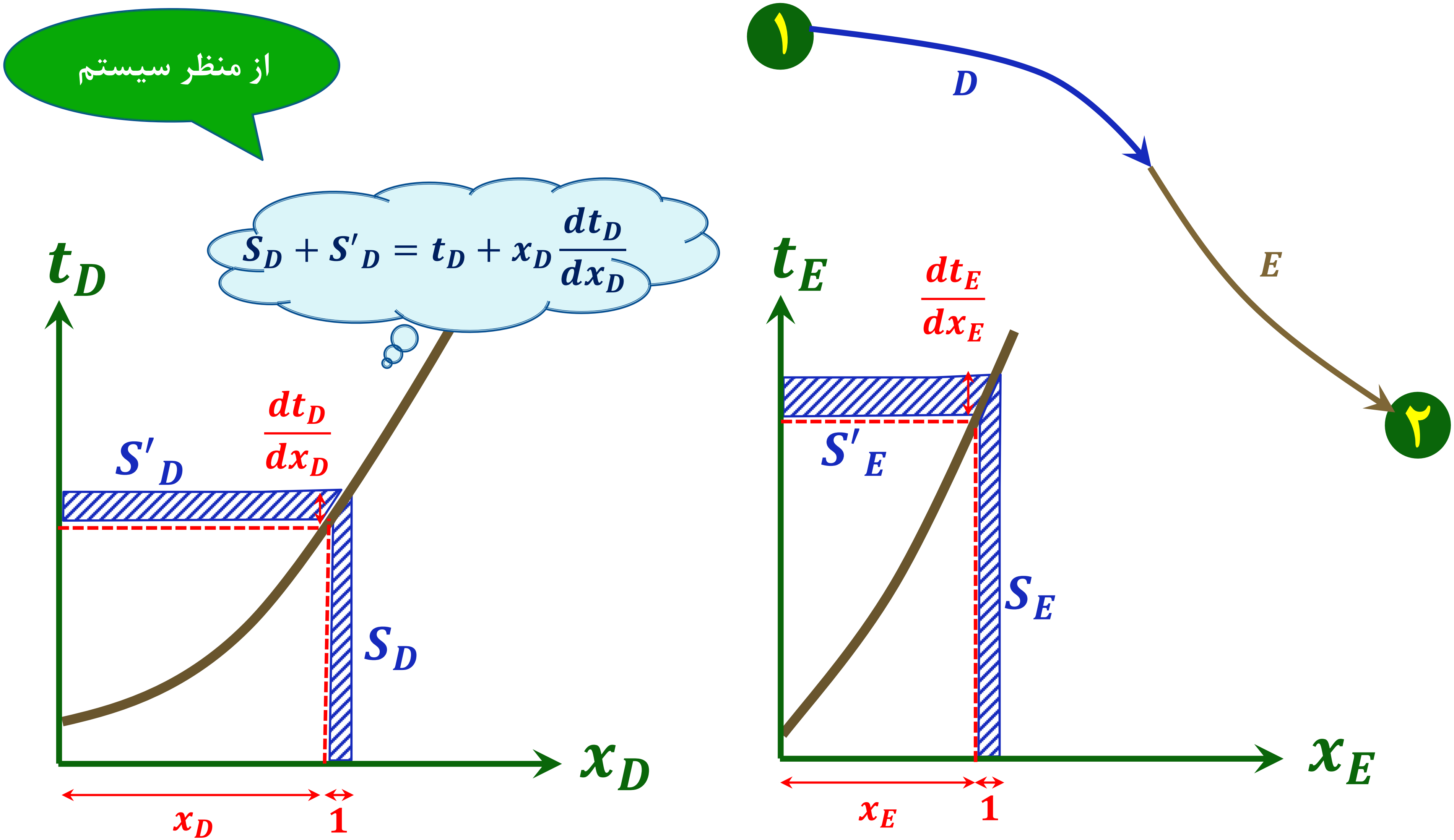
$$\underbrace{S_A + S_B + S_C}_{c^{12}_{A-B-C}} < \overset{?}{=} > \underbrace{S_D + S_E}_{c^{12}_{D-E}}$$

(هزینه مسیر)



محمد تمنایی

فرمول بندی مساله تخصیص
مفهوم تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO



$$(S_D + S_E) + (S'_D + S'_E)$$

زمان سفر استفاده کننده از مسیر+

زمانهای اضافه شده به سایر استفاده کنندگان ناشی از افزوده شدن یک استفاده کننده

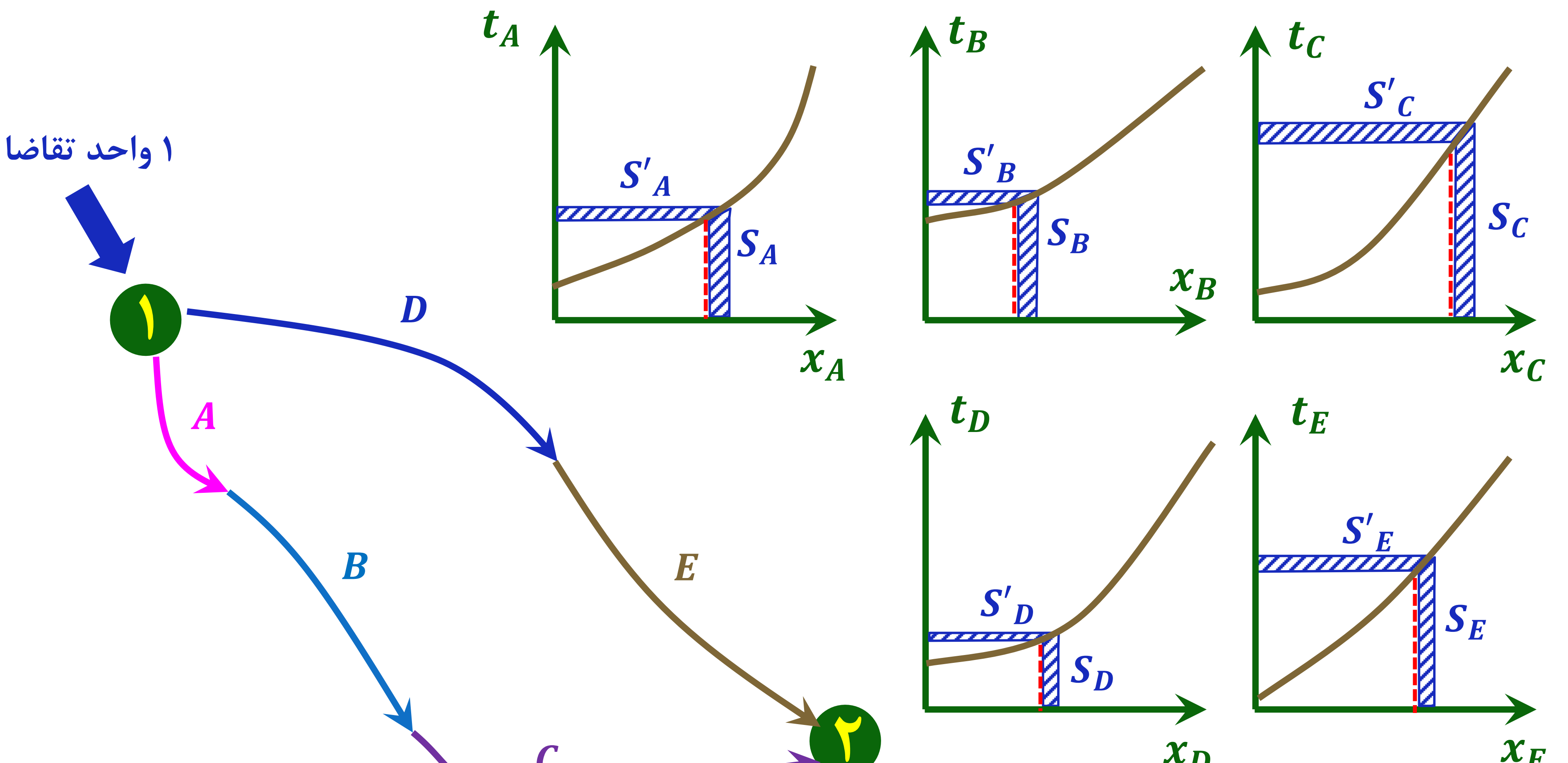
فرمول بندی مساله تخصیص

مفهوم تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO

از منظر سیستم

$$\underbrace{S_A + S'_A + S_B + S'_B + S_C + S'_C}_{\tilde{c}^{12}_{A-B-C}} \overset{?}{<=>} \underbrace{S_D + S'_D + S_E + S'_E}_{\tilde{c}^{12}_{D-E}}$$

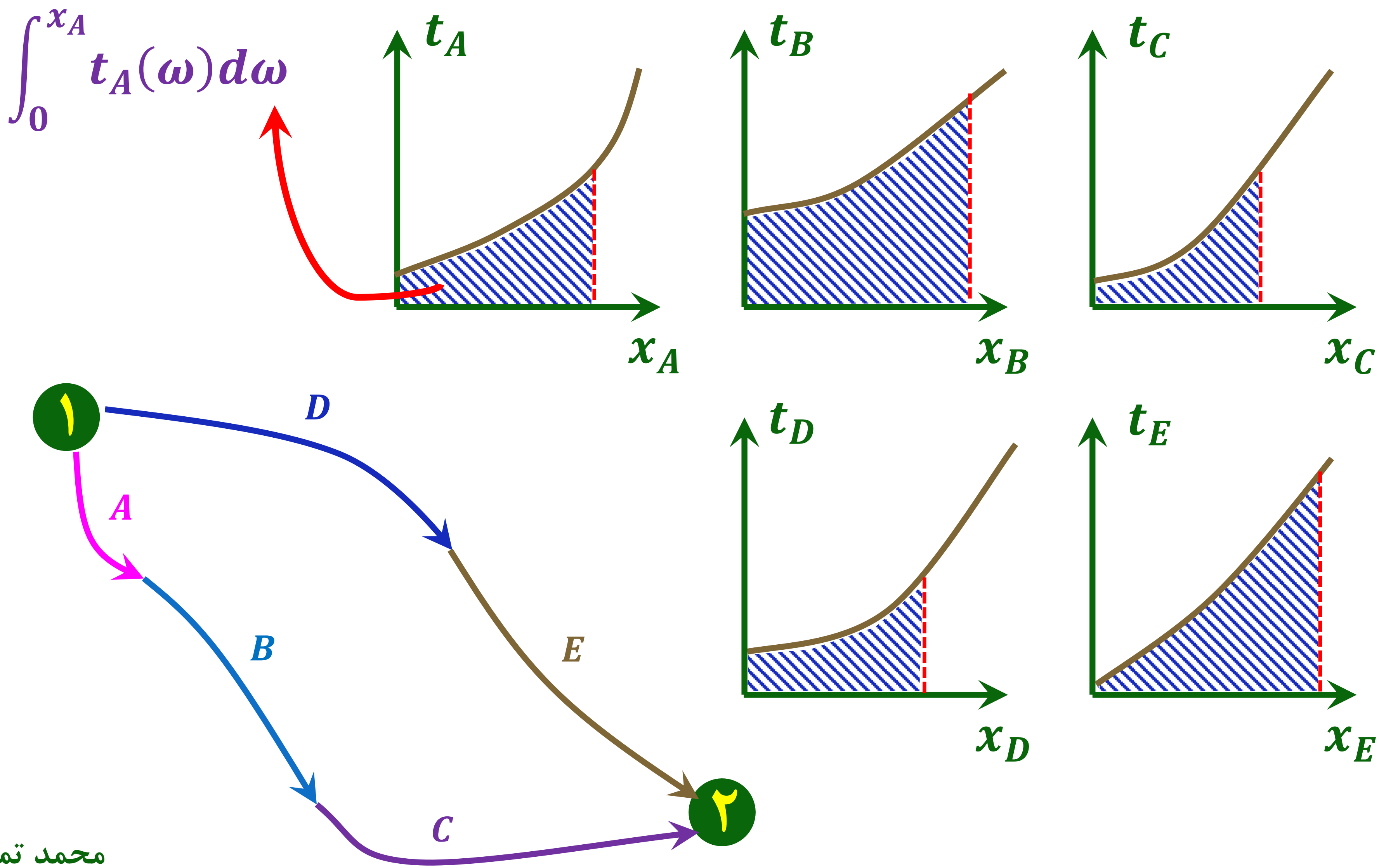
(هزینه حاشیه ای مسیر) $\tilde{c}^{12}_{A-B-C}$



محمد تمنایی

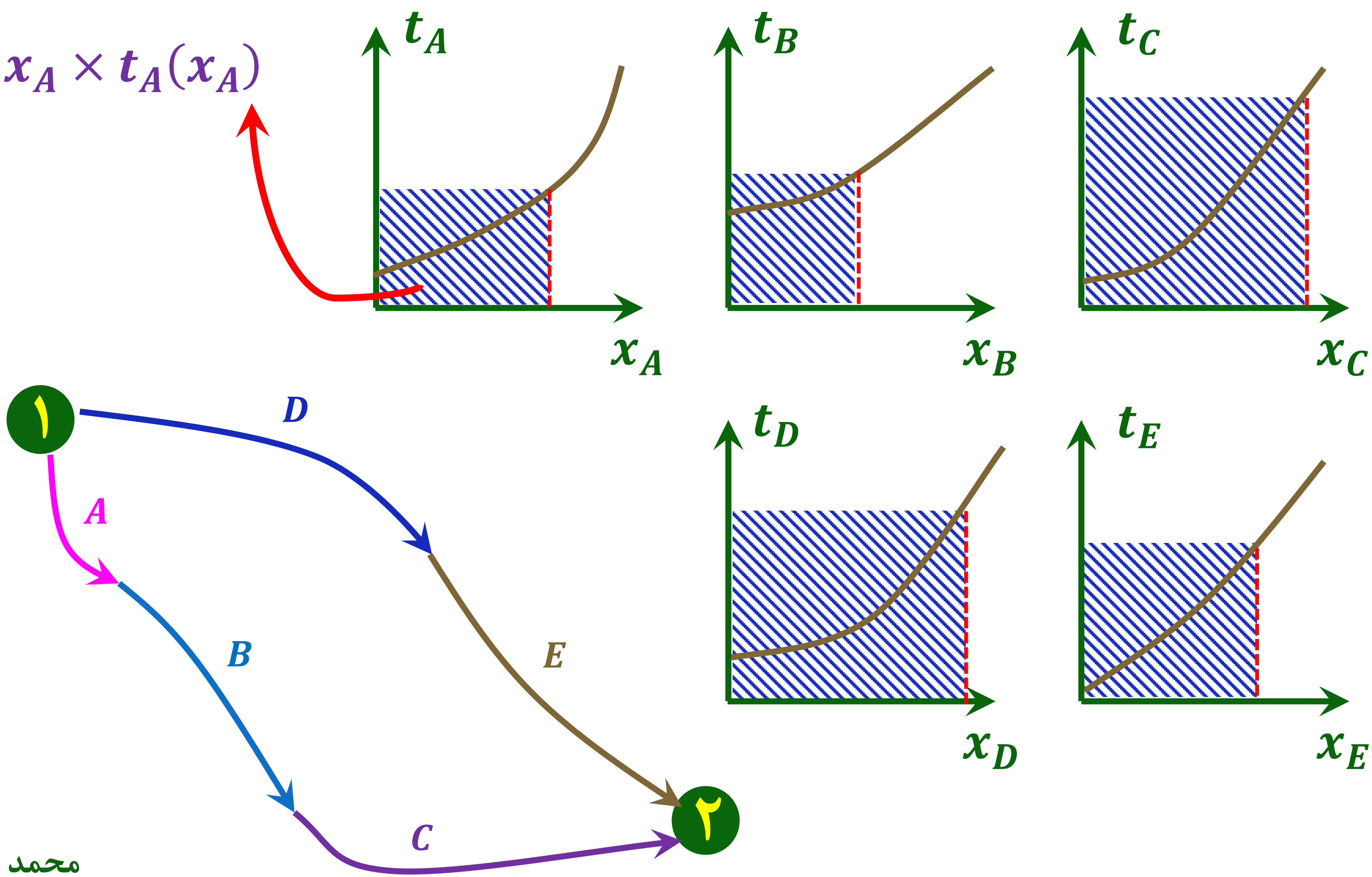
فرمول بندی مساله تخصیص مفهوم تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO

شرایط تعادل استفاده کننده (UE) در حالتی روی می دهد که مجموع سطوح زیر نمودارهای عملکرد کمانها کمینه باشد.



محمد تمنایی

شرایط بهینگی سیستم (SO) در حالتی روی می دهد که مجموع زمان سفر کمانهای شبکه کمینه باشد (ارتباطی با مساحت زیر نمودارهای عملکرد کمانها ندارد).



محمد تمنایی

مسئله تخصیص ترافیک در شرایط بهینگی سیستم:

$$Min\ \tilde{Z}(X) = \sum_a x_a \times t_a(x_a)$$

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

همان محدودیت های
مدل Beckmann (شرایط UE)

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$ محدودیت تعریفی:

بررسی شرایط درجه اول بهینگی (شروط کوهن تاکر)

$$Min\ \tilde{Z}(X(f)) = \sum_a x_a \times t_a(x_a)$$

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$ محدودیت ضمنی (تعریفی)

تابع لاگرانژ مسئله

$$\tilde{L}(f,\tilde{u}) = Z\big(X(f)\big) + \sum_{rs} \tilde{u}_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})$$

S.t.

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$\tilde{L}(f,\tilde{u}) = Z\big(X(f)\big) + \sum_{rs} \tilde{u}_{rs}\left(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\right)$$

S.t.

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

شرایط درجه اول بهینگی

First Order Conditions

$$\begin{cases} f_k^{rs}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial f_k^{rs}} = 0 & \forall k,r,s \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 & \forall k,r,s \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{u}_{rs}} = 0 & \forall (r,s) \\[2ex] f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \end{cases}$$

فرمول بندی مساله تخصیص

مدل ریاضی تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO

$$\tilde{Z}(X(f)) = \sum_{a} x_a \times t_a(x_a)$$

$$\tilde{L}(f, \tilde{u}) = Z\big(X(f)\big) + \sum_{rs} \tilde{u}_{rs}\Big(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\Big)$$

S.t. $f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f_l^{mn}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \tilde{Z}\big(X(f)\big)} + \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} \tilde{u}_{rs}\Big(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\Big)} \qquad \forall m, n, l$$

قاعده زنجیره ای:

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \tilde{Z}\big(X(f)\big) = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{a \in A} x_a \times t_a(x_a) = \sum_{a \in A} \left[\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \big(x_a \times t_a(x_a)\big)\right]$$

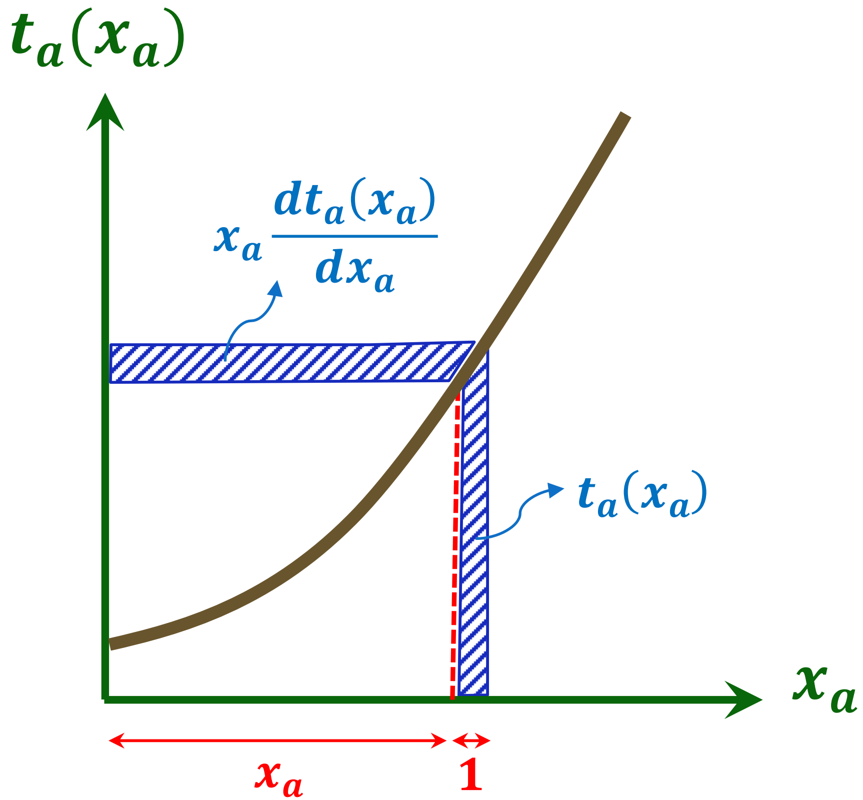
$$= \sum_{a \in A} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\big(x_a \times t_a(x_a)\big)\right) \times \frac{\partial x_a}{\partial f_l^{mn}}\right] = \sum_{a \in A} \left[\left(\frac{d}{d x_a}\big(x_a \times t_a(x_a)\big)\right) \times \delta_{a,l}^{mn}\right]$$

$$= \sum_{a \in l} \frac{d}{d x_a}\big(x_a \times t_a(x_a)\big) = \sum_{a \in l} \left(t_a(x_a) + x_a \frac{d t_a(x_a)}{d x_a}\right) = \sum_{a \in l} \tilde{t}_a(x_a) = \tilde{c}_l^{mn}$$

$\tilde{c}_l^{mn}$: زمان (هزینه) حاشیه ای سفر مسیر l بین زوج مبدأ-مقصد mn

$\tilde{t}_a(x_a)$ هزینه زمانی اضافه شدن یک خودرو در کمان a

$$\tilde{t}_a(x_a) = \left(t_a(x_a) + x_a \frac{dt_a(x_a)}{dx_a}\right)$$



$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f_l^{mn}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \tilde{Z}(X(f))} + \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} \tilde{u}_{rs}(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs})}$$

$$\tilde{c}_l^{mn}$$

$$\frac{\partial f_k^{rs}}{\partial f_l^{mn}} = \begin{cases} 1 & r = m, s = n, k = l \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} \tilde{u}_{rs} \left(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs} \right) = -\tilde{u}_{mn}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \tilde{L}\,(f, \tilde{u}) = \tilde{c}_l^{mn} - \tilde{u}_{mn}$$

$$\tilde{L}(f,\tilde{u}) = Z\big(X(f)\big) + \sum_{rs} \tilde{u}_{rs}\Big(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\Big)$$

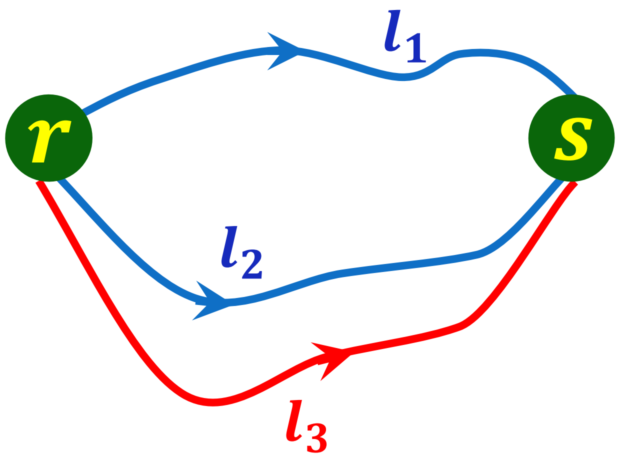
S.t.

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

$$\left\{\begin{array}{ll} f_k^{rs}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial f_k^{rs}} = 0 & \forall k,r,s \\ \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 & \forall k,r,s \\ \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial u_{rs}} = 0 & \forall (r,s) \\ f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} f_k^{rs}(\tilde{c}_k^{rs} - \tilde{u}_{rs}) = 0 & \forall k,r,s \\ \tilde{c}_k^{rs} - \tilde{u}_{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \\ \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} & \forall (r,s) \\ f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \end{array}\right.$$

$\tilde{u}_{rs}$: زمان (هزینه) حاشیه ای سفر کمینه بین زوج مبدأ–مقصد rs



$$\begin{cases} f_k^{rs}(\tilde{c}_k^{rs} - \tilde{u}_{rs}) = 0 & \forall k, r, s \\ \tilde{c}_k^{rs} - \tilde{u}_{rs} \geq 0 & \forall k, r, s \\ \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} & \forall (r, s) \\ f_k^{rs} \geq 0 & \forall k, r, s \end{cases}$$

$$If \quad f_{l_1}^{rs} > 0 \rightarrow \tilde{c}_{l_1}^{rs} = \tilde{u}_{rs}$$

$$If \quad f_{l_2}^{rs} > 0 \rightarrow \tilde{c}_{l_1}^{rs} = \tilde{u}_{rs}$$

$$If \quad f_{l_3}^{rs} = 0 \rightarrow \tilde{c}_{l_1}^{rs} \geq \tilde{u}_{rs}$$

شرایط تخصیص SO:

- ✓ زمان حاشیه ای سفر مسیرهای استفاده شده یک OD با هم برابر است.
- ✓ زمان حاشیه ای سفر مسیرهای استفاده نشده OD بزرگتر (یا مساوی) است.

فرمول بندی مساله تخصیص

بررسی شرایط درجه دوم بهینگی (یگانگی جواب)

$$Min\ \tilde{Z}(X(f)) = \sum_a x_a \times t_a(x_a)$$

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

شرایط درجه دوم بهینگی

Second Order Conditions

شرط کافی:

- تابع $\tilde{Z}$ در حوالی X^* اکیداً محدب باشد.
- تابع $\tilde{Z}$ در سایر نقاط، محدب باشد.
- ناحیه امکانپذیر محدب باشد.

همه محدودیت ها خطی هستند ⟸ ناحیه امکانپذیر محدب است.

اگر ماتریس هشین $\tilde{Z}$ مثبت قطعی باشد ⟸ تابع $\tilde{Z}$ در همه نقاط اکیداً محدب است.

مدل ریاضی تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO

$$\tilde{Z}(X(f)) = \sum_{a} x_a \times t_a(x_a)$$

مشتق اول Z

$$\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial x_a} = \frac{\partial}{\partial x_a} \sum_{b \in A} x_b \times t_b(x_b) = \frac{d}{dx_a}\left(x_a \times t_a(x_a)\right) = t_a(x_a) + x_a \frac{dt_a(x_a)}{dx_a}$$

مشتق دوم Z

$$\frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial x_b \partial x_a} = \begin{cases} \frac{d}{dx_b}\left(t_a(x_a) + x_a \frac{dt_a(x_a)}{dx_a}\right) = 2\frac{dt_a(x_a)}{dx_a} + x_a \frac{d^2 t_a(x_a)}{d{x_a}^2} > 0 & if\ a = b \\ 0 & if\ a \neq b \end{cases}$$

فرمول بندی مساله تخصیص

مدل ریاضی تخصیص تعادل (بهینگی) سیستم SO

$$\tilde{Z}(X(f)) = \sum_a x_a \times t_a(x_a)$$

ماتریس هشین $\tilde{Z}$ $\nabla^2 \tilde{Z}(X) =$

$$\nabla^2 \tilde{Z}(X) = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial {x_1}^2}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \boxed{\frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial {x_2}^2}} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{\frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial {x_A}^2}} \end{bmatrix}$$

مثبت

$$\vec{h} = (y_1, y_2, \dots, y_A) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{h} . \nabla^2 \tilde{Z}(X) . \vec{h^T} = \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial {x_1}^2} \times {y_1}^2 + \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial {x_2}^2} \times {y_2}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial {x_A}^2} \times {y_A}^2 > 0$$

ماتریس هشین $\tilde{Z}$ مثبت قطعی است ⬅ تابع $\tilde{Z}$ در همه نقاط اکیداً محدب است.

$$Min\ \widetilde{Z}(X(f)) = \sum_a x_a \times t_a(x_a)$$

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

شرایط درجه دوم بهینگی
Second Order Conditions

شرط کافی

تابع $\widetilde{Z}$ در همه نقاط اکیداً محدب است.

ناحیه امکانپذیر محدب است.

جواب جریان بهینگی سیستم SO $\widetilde{X}^* = \{\widetilde{x}_1{}^*, \widetilde{x}_2{}^*, \ldots, \widetilde{x}_A{}^*\}$ یگانه است.

(مطابق شرط کافی) تنها یک الگوی جریان کمانها می تواند تابع هدف را کمینه کند.

منابع

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 3)