دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

فرمول بندی مساله تخصیص

«برابری فرمول ریاضی بکمن با شرایط UE»

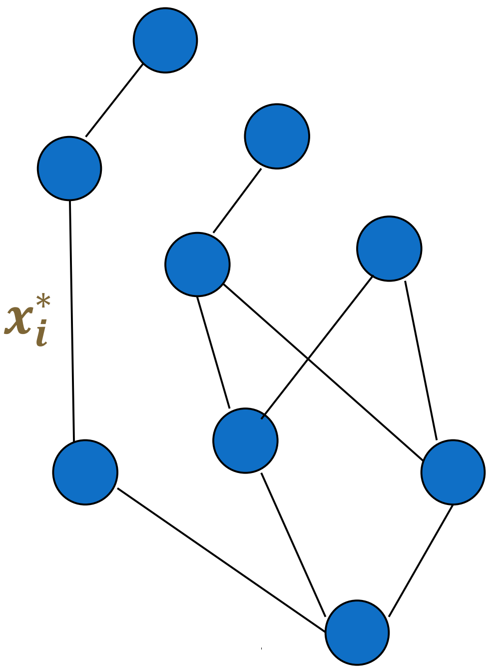
مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

به دنبال چه هستیم؟

یافتن جریان در کمانها در شرایط تعادل UE

$$\boldsymbol{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$



x_i^*

حجم جریان در کمان i ام در شرایط تعادل

مسئله تخصیص ترافیک در شرایط تعادل استفاده کننده (با تقاضای ثابت):

Beckmann Model

$$Min\, Z(X) = \sum_{a} \int_{0}^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

S.t.

$$\sum_{k} f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

باید بررسی شود آیا شرایط تعادل را لحاظ می کند؟

محدودیت تعریفی:

$$x_a = \sum_{r} \sum_{s} \sum_{k} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$\text{S.t.} \quad \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \ \ \forall r,s \quad , f_k^{rs} \geq 0 \ \ \forall k,r,s \quad , x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

ویژگی های مسئله:

۱

$$\frac{\partial f_k^{rs}}{\partial f_l^{mn}} = 0 \quad rs \neq mn \ \text{یا} \ k \neq l$$

۲

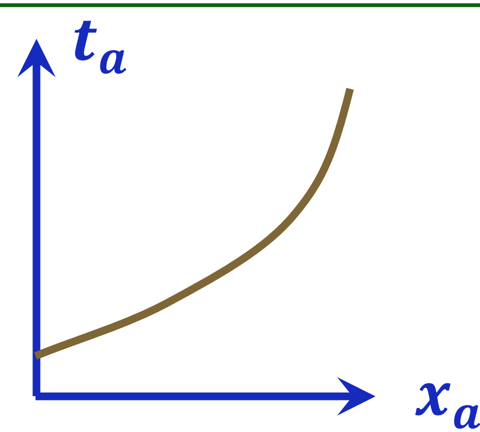
$$\frac{\partial x_a(f)}{\partial f_l^{mn}} = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} = \delta_{a,l}^{mn}$$

۳

$$\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_b} = 0 \quad \forall a \neq b$$

۴

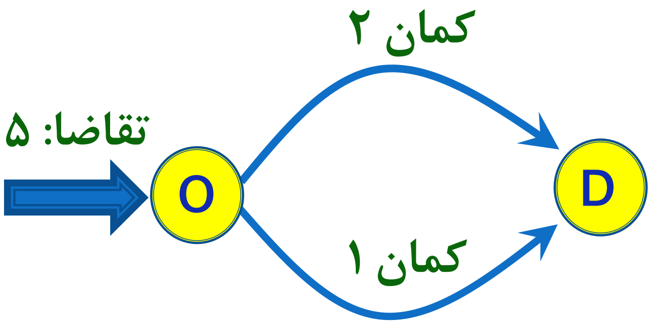
$$\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a} > 0 \quad \forall a$$

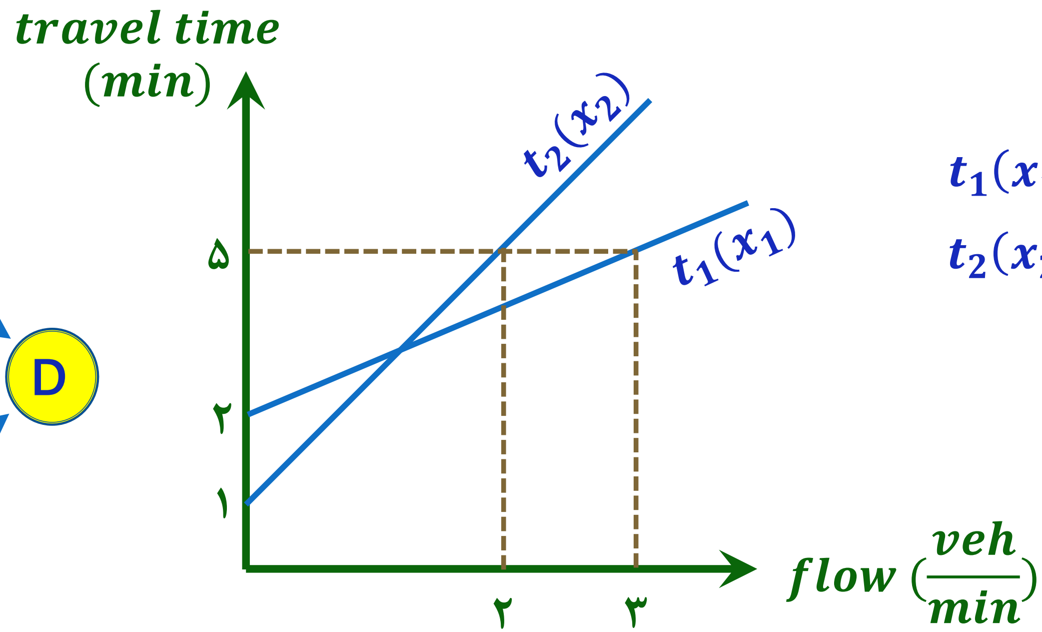


مثال:

$$t_1(x_1) = 2 + x_1$$

$$t_2(x_2) = 1 + 2x_2$$





روش اول

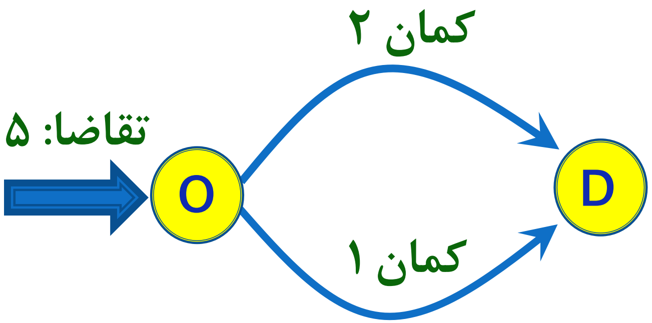
فرض $x_1 > 0\ , x_2 > 0 \ \rightarrow t_1 = t_2$

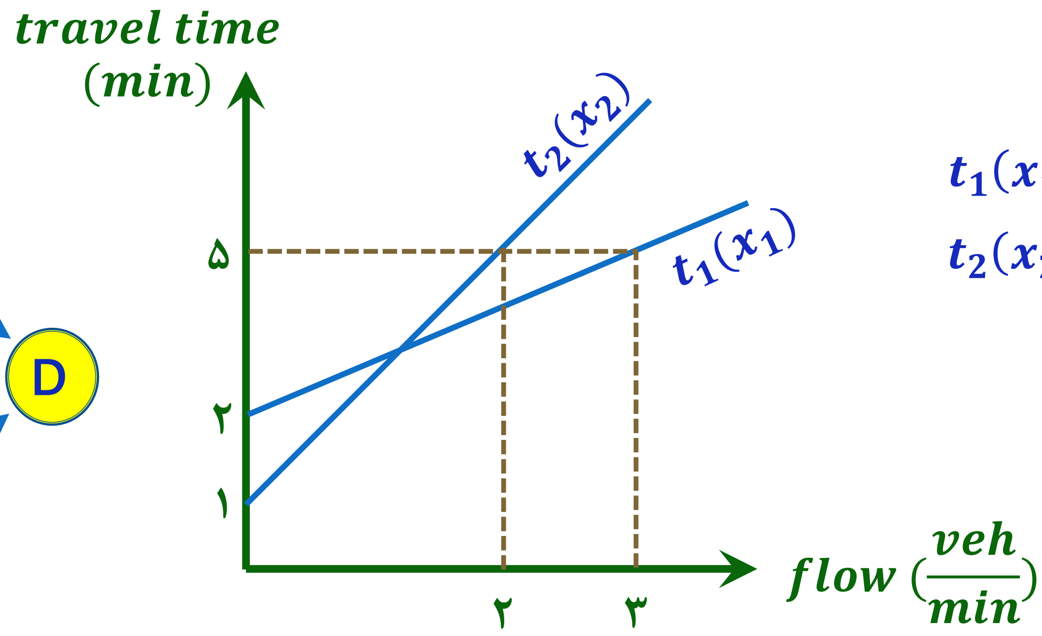
$$\begin{cases} 2 + x_1 = 1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 2 \\ t_1 = t_2 = 5 \end{cases}$$

مثال:

$$t_1(x_1) = 2 + x_1$$

$$t_2(x_2) = 1 + 2x_2$$





روش دوم

$$Min\ Z(X) = \int_0^{x_1} (2+\omega)d\omega + \int_0^{x_2} (1+2\omega)d\omega$$

$$S.t.\ \ x_1 + x_2 = 5\ ,\ x_1, x_2 \geq 0$$

تک متغیره
بدون محدودیت

$$Min\ Z(x_1) = \int_0^{x_1} (2+\omega)d\omega + \int_0^{5-x_1} (1+2\omega)d\omega \quad S.t.\ x_1 \geq 0, 5 - x_1 \geq 0$$

$$\frac{\partial Z(x_1)}{\partial x_1} = 0 \rightarrow [1 \times (2 + x_1) - 0] + [(-1) \times (1 + 2(5 - x_1)) - 0] = 3x_1 - 9 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 3 \geq 0\ , x_2 = 5 - 3 = 2 \geq 0 \quad \begin{cases} (x_1^*, x_2^*) = (3,2) \\ t_1 = t_2 = 5 \end{cases}$$

آیا فرمول Beckmann بیان کننده شرایط تخصیص UE است؟

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

شرایط تخصیص UE:

- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده شده یک OD با هم برابر است.
- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده نشده OD بزرگتر (یا مساوی) است.

فرمول Beckmann :

- ✓ بررسی شرایط درجه اول بهینگی (شروط کوهن تاکر)
- ✓ بررسی شرایط درجه دوم بهینگی (یگانگی جواب کمینه)

بررسی شرایط درجه اول بهینگی (شروط کوهن تاکر)

$$Min\ Z(X(f)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$ محدودیت ضمنی (تعریفی)

تابع لاگرانژ مسئله

$$L(f,u) = Z\big(X(f)\big) + \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})$$

S.t.

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

یادآوری

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \qquad j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

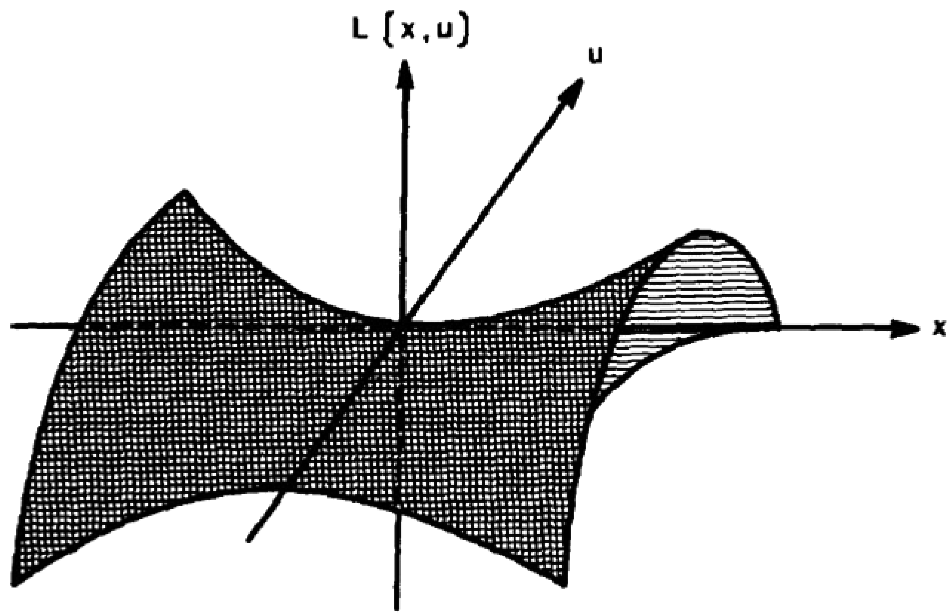
$$L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) = Z(\boldsymbol{X}) + \sum_{j=1}^{m} u_j \left(b_j - \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i\right)$$

$$\boldsymbol{S.t.} \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u_j} = 0 & \forall j \\ x_i \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & \forall i \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} \geq 0 & \forall i \\ x_i \geq 0 & \forall i \end{cases}$$

u_j آزاد در علامت



مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه اول

$$L(f,u) = Z\big(X(f)\big) + \sum_{rs} u_{rs}\Big(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\Big)$$

S.t.

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

شرایط درجه اول بهینگی

First Order Conditions

$$\begin{cases} f_k^{rs}\dfrac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 & \forall k,r,s \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 & \forall k,r,s \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial u_{rs}} = 0 & \forall (r,s) \\[2ex] f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \end{cases}$$

فرمول بندی مساله تخصیص

مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه اول

$$Z(X(f)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

$$L(f,u) = Z\big(X(f)\big) + \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})$$

S.t.

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_l^{mn}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} Z\big(X(f)\big)} + \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})} \quad \forall m,n,l$$

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} Z\big(X(f)\big) = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{a\in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega = \sum_{a\in A}\left[\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega\right]$$ قاعده زنجیره ای:

$$= \sum_{a\in A}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega\right) \times \frac{\partial x_a}{\partial f_l^{mn}}\right] = \sum_{a\in A}[(t_a(x_a)) \times \delta_{a,l}^{mn}] = \sum_{a\in l}[t_a(x_a)] = c_l^{mn}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} Z\big(X(f)\big)} = c_l^{mn}$$

c_l^{mn} : زمان (هزینه) سفر مسیر l بین زوج مبدأ-مقصد mn

مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه اول

$$\frac{\partial L}{\partial f_l^{mn}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} Z(X(f))} + \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs})}$$

$$c_l^{mn}$$

$$\frac{\partial f_k^{rs}}{\partial f_l^{mn}} = \begin{cases} 1 & r = m, s = n, k = l \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\right) = -u_{mn}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} L(f, u) = c_l^{mn} - u_{mn}$$

مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه اول

$$L(f,u) = Z\big(X(f)\big) + \sum_{rs} u_{rs}\Big(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\Big)$$

S.t.

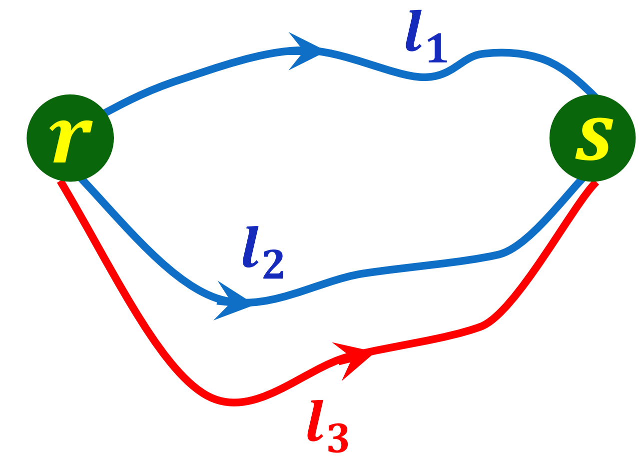
$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

شرایط درجه اول بهینگی

First Order Conditions

$$\begin{cases} f_k^{rs}\dfrac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 & \forall k,r,s \\ \dfrac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 & \forall k,r,s \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_{rs}} = 0 & \forall (r,s) \\ f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 & \forall k,r,s \\ c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \\ \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} & \forall (r,s) \\ f_k^{rs} \geq 0 & \forall k,r,s \end{cases}$$

مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه اول



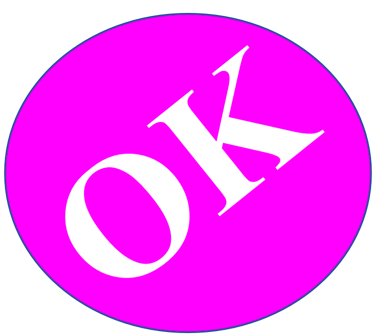
u_{rs} : زمان (هزینه) سفر کوتاهترین مسیر بین زوج مبدأ–مقصد rs

$$\begin{cases} f_k^{rs}(c_k^{rs}-u_{rs})=0 & \forall k,r,s \\ c_k^{rs}-u_{rs}\geq 0 & \forall k,r,s \\ \sum_k f_k^{rs}=q_{rs} & \forall (r,s) \\ f_k^{rs}\geq 0 & \forall k,r,s \end{cases}$$

$$If \quad f_{l_1}^{rs}>0 \rightarrow c_{l_1}^{rs}=u_{rs}$$

$$If \quad f_{l_2}^{rs}>0 \rightarrow c_{l_2}^{rs}=u_{rs}$$

$$If \quad f_{l_3}^{rs}=0 \rightarrow c_{l_3}^{rs}\geq u_{rs}$$



شرایط تخصیص UE:

- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده شده یک OD با هم برابر است.
- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده نشده OD بزرگتر (یا مساوی) است.

بررسی شرایط درجه دوم بهینگی (یگانگی جواب)

$$Min\ Z(X(f)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

شرایط درجه دوم بهینگی
Second Order Conditions

شرط کافی:
- تابع Z در حوالی X^* اکیداً محدب باشد.
- تابع Z در سایر نقاط، محدب باشد.
- ناحیه امکانپذیر محدب باشد.

همه محدودیت ها خطی هستند ⟸ ناحیه امکانپذیر محدب است.

اگر ماتریس هشین Z مثبت قطعی باشد ⟸ تابع Z در همه نقاط اکیداً محدب است.

مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه دوم

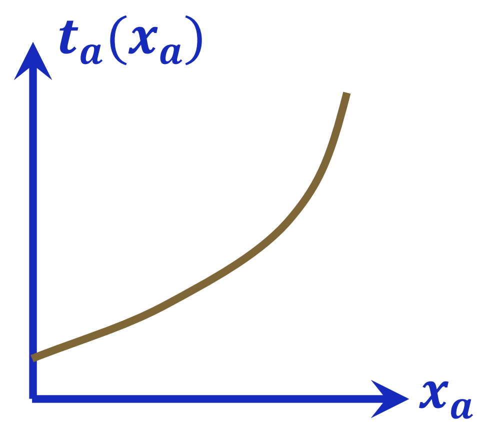
$$Z(X(f)) = \sum_{a} \int_{0}^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

مشتق اول Z

$$\frac{\partial Z}{\partial x_a} = \frac{\partial}{\partial x_a} \sum_{b \in A} \int_{0}^{x_b} t_b(\omega)d\omega = \int_{0}^{x_a} t_a(\omega)d\omega = t_a(x_a)$$

مشتق دوم Z

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_a \partial x_b} = \begin{cases} \dfrac{dt_a(x_a)}{dx_a} > 0 & if\ a = b \\ 0 & if\ a \neq b \end{cases}$$



فرمول بندی مساله تخصیص   مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه دوم

$$Z(X(f)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

ماتریس هشین Z

$$\nabla^2 Z(X) = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{dt_1(x_1)}{dx_1}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \boxed{\frac{dt_2(x_2)}{dx_2}} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{\frac{dt_A(x_A)}{dx_A}} \end{bmatrix}$$

مثبت

$$\vec{h} = (y_1, y_2, \dots, y_A) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{h}.\nabla^2 Z(X).\overrightarrow{h^T} = \frac{dt_1(x_1)}{dx_1} \times {y_1}^2 + \frac{dt_2(x_2)}{dx_2} \times {y_2}^2 + \cdots + \frac{dt_A(x_A)}{dx_A} \times {y_A}^2 > 0$$

ماتریس هشین Z مثبت قطعی است ⟸ تابع Z در همه نقاط اکیداً محدب است.

مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه دوم

$$Min\ Z(X(f)) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

شرایط درجه دوم بهینگی

Second Order Conditions

شرط کافی:

تابع Z در همه نقاط اکیداً محدب است.

ناحیه امکانپذیر محدب است.

جواب جریان تعادل UE $X^* = \{x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_A{}^*\}$ یگانه است.

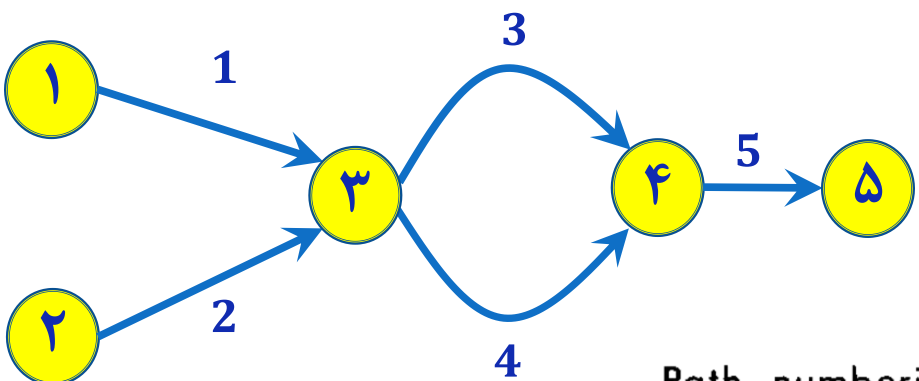
(مطابق شرط کافی) تنها یک الگوی جریان کمانها می تواند تابع هدف را کمینه کند.

(مطابق شرط لازم) این الگو، همان الگوی جریان UE است.

مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه دوم

دقت: $X^* = \{x_1{}^*, x_2{}^*, \dots, x_A{}^*\}$ یگانه است (متغیر تصمیم تابع هدف) نه f_k^{rs}.

در نقطه ی جواب X^* (که نقطه ای یگانه است) ممکن است چندین جواب f_k^{rs} وجود داشته باشد.



از ۱ به ۵ : دو مسیر

از ۲ به ۵ : دو مسیر

$$\begin{cases} q_{15} = 2 \\ q_{25} = 3 \end{cases}$$

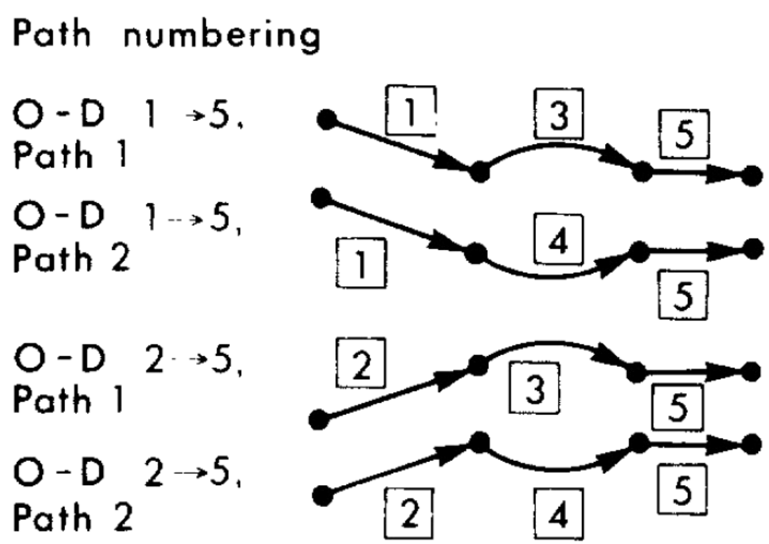
$t_1(x_1) = 1$

$t_2(x_2) = 2$

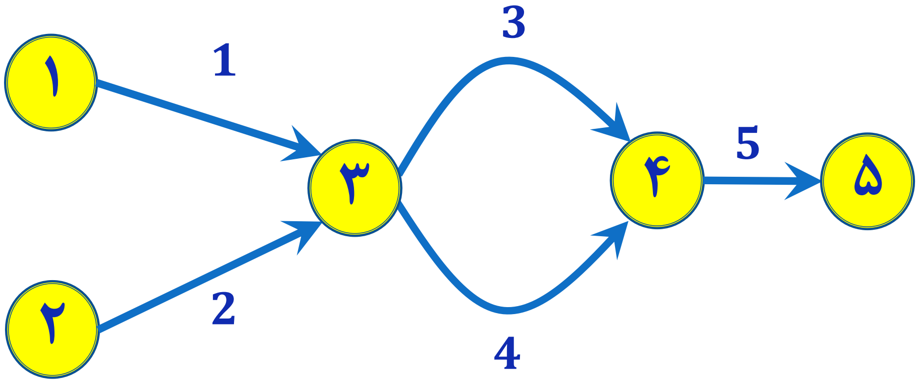
$t_3(x_3) = 2 + x_3$

$t_4(x_4) = 1 + 2x_4$

$t_5(x_5) = 1$



مدل ریاضی تخصیص UE: شرایط درجه دوم



جواب تعادل حجم کمانها (یگانه است):

$$X^*:\{x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*, x_4{}^*, x_5{}^*\} = \{2,3,3,2,5\}$$

جوابهای ممکن جریانهای مسیرها (یگانه نیستند و هریک به همان جواب حجم کمانها منتج می شوند):

	$f_1^{15} = 0$	$f_2^{15} = 2$	$f_1^{25} = 3$	$f_2^{25} = 0$
یا	$f_1^{15} = 2$	$f_2^{15} = 0$	$f_1^{25} = 1$	$f_2^{25} = 2$
یا	$f_1^{15} = 2\alpha$	$f_2^{15} = 2(1-\alpha)$	$f_1^{25} = 3-2\alpha$	$f_2^{25} = 2\alpha$

$$0 \le \alpha \le 1$$

هریک، یک جواب تعادل UE محسوب می شود.

شرایط UE نسبت به جریان کمانها یکتا است.

شرایط UE نسبت به جریان مسیرها یکتا نیست.

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 3)