دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

فرمول بندی مساله تخصیص

«مدل ریاضی تعادل UE»

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فرمول بندی مساله تخصیص

فهرست:

- ✓ تعاریف
- ✓ مدل ریاضی تخصیص UE (تعادل واردراپ)

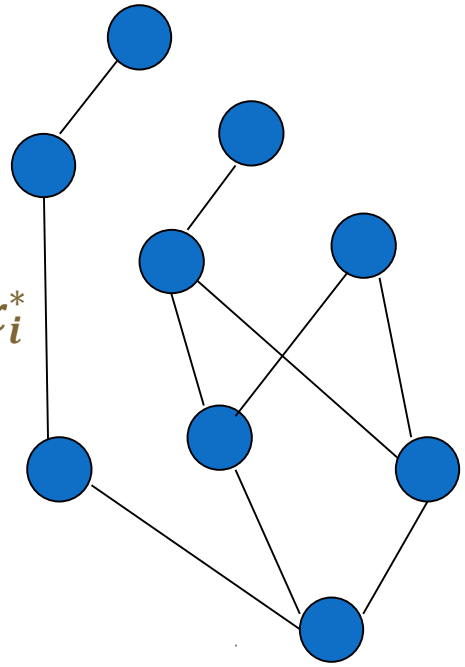
فرمول بندی مساله تخصیص

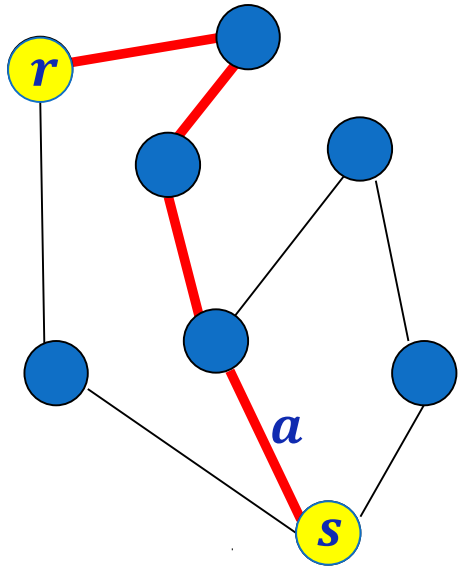
به دنبال چه هستیم؟

یافتن جریان در کمانها در شرایط تعادل UE

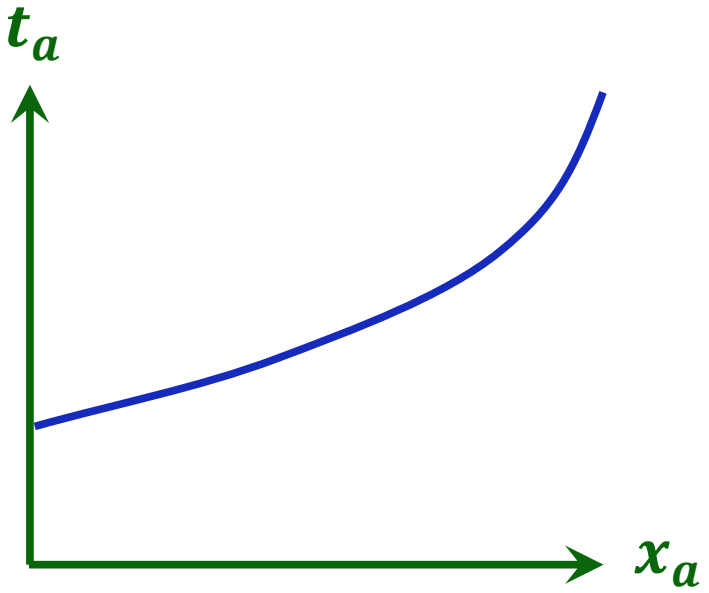
$$X^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

x_i^* ← حجم جریان در کمان i ام در شرایط تعادل





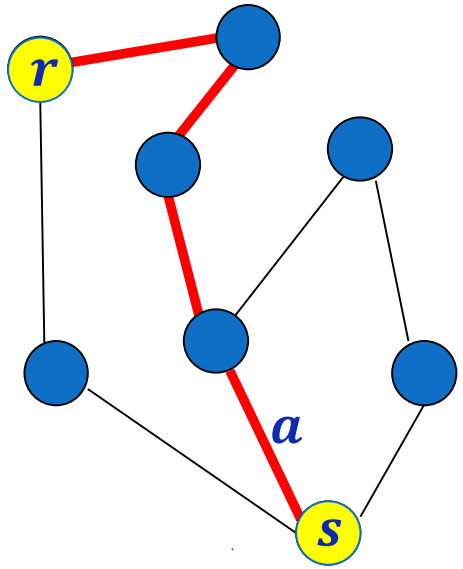
مسیر k ام بین r و s



$$t_a = t_a(x_a)$$

فرمول بندی مساله تخصیص

آیا کمان a در مسیر k ام بین r و s قرار دارد؟



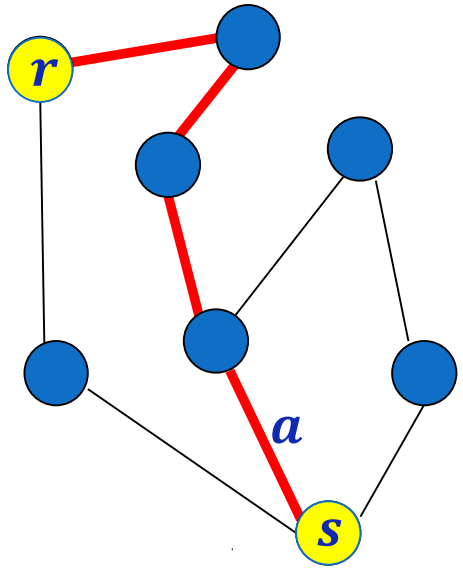
مسیر k ام بین r و s

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

ورودی مسئله
(توپولوژی شبکه)

فرمول بندی مساله تخصیص

زمان (هزینه) سفر مسیر k ام بین r و s چقدر است؟

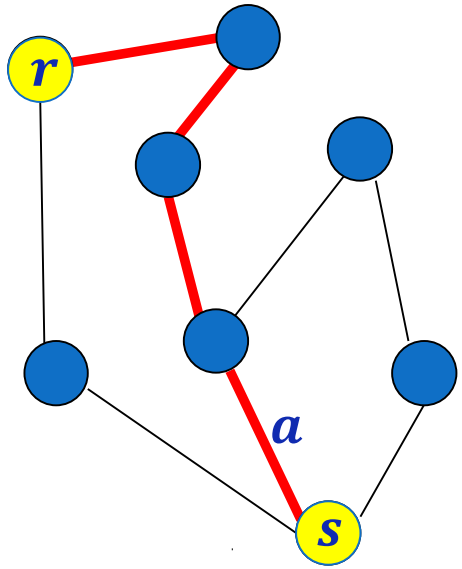


$$c_k^{rs} = \sum_a t_a . \delta_{a,k}^{rs}$$

مسیر k ام بین r و s

فرمول بندی مساله تخصیص

f_k^{rs} حجم جریان مربوط به مسیر k ام بین r و s (مجهول)



مسیر k ام بین r و s

حجم جریان در کمان a چقدر است؟

مجموع جریانها روی همه مسیرهایی که شامل کمان a هستند.

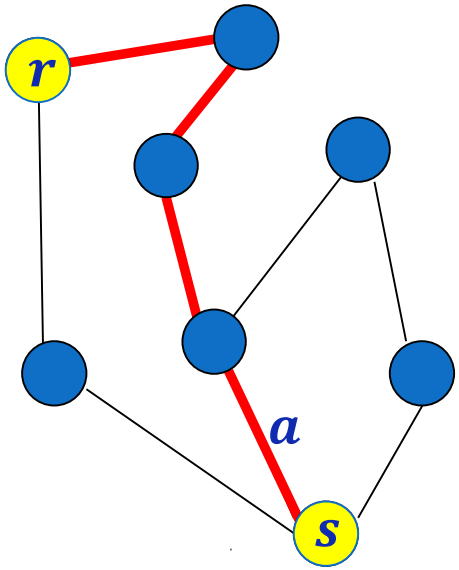
$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

Path-Arc Incidence Relationships

روابط وقوع مسیر-کمان

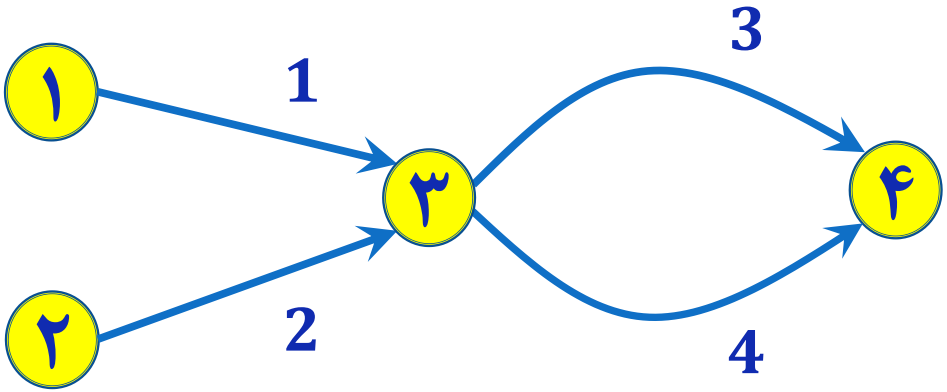
$$c_k^{rs} = \sum_a t_a . \delta_{a,k}^{rs}$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$



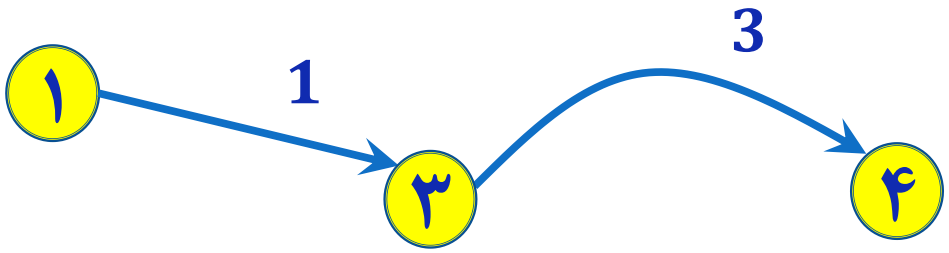
مسیر k ام بین r و s

فرمول بندی مساله تخصیص



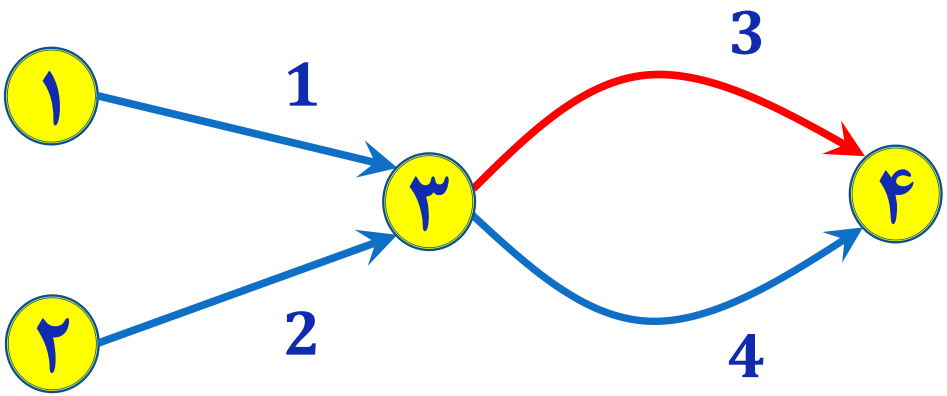
زوج مبدأ-مقصد ۱ به ۴

زوج مبدأ-مقصد ۲ به ۴



$$c_1^{14} = \sum_a t_a . \delta_{a,1}^{14} = \; t_1\delta_{1,1}^{14} + t_2\delta_{2,1}^{14} + t_3\delta_{3,1}^{14} + t_4\delta_{4,1}^{14} = t_1 + t_3$$

فرمول بندی مساله تخصیص



زوج مبدأ-مقصد ۱ به ۴

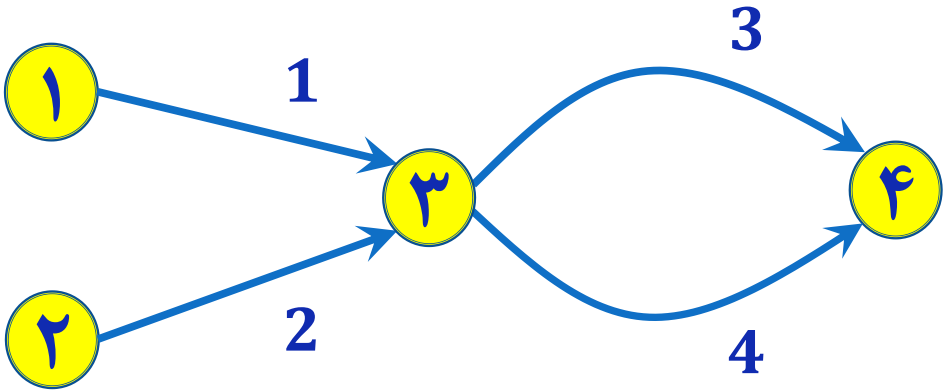
زوج مبدأ-مقصد ۲ به ۴

$$x_3 = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{3,k}^{rs}$$

$$x_3 = f_1^{14}\delta_{3,1}^{14} + f_2^{14}\delta_{3,2}^{14} + f_1^{24}\delta_{3,1}^{24} + f_2^{24}\delta_{3,2}^{24}$$

$$x_3 = f_1^{14} + f_2^{14}$$

فرمول بندی مساله تخصیص



زوج مبدأ-مقصد ۱ به ۴

زوج مبدأ-مقصد ۲ به ۴

Δ ماتریس وقوع مسیر-کمان

link \ path	O-D 1-4		O-D 2-4	
	1	2	1	2
1	1	1	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	1	0
4	0	1	0	1

روابط وقوع مسیر-کمان

Path-Arc Incidence Relationships

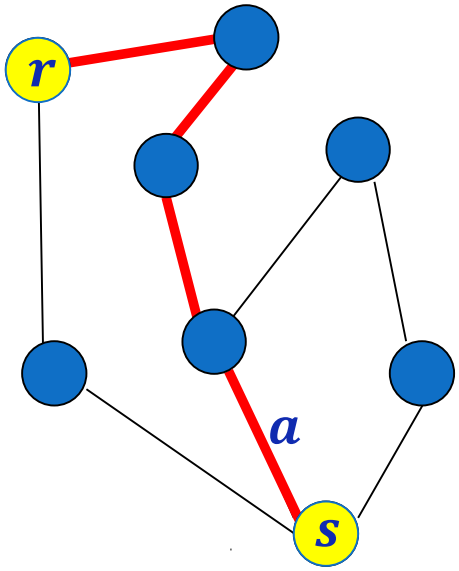
$$c_k^{rs} = \sum_a t_a . \delta_{a,k}^{rs}$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

نمایش بُرداری

$$c = t.\Delta$$

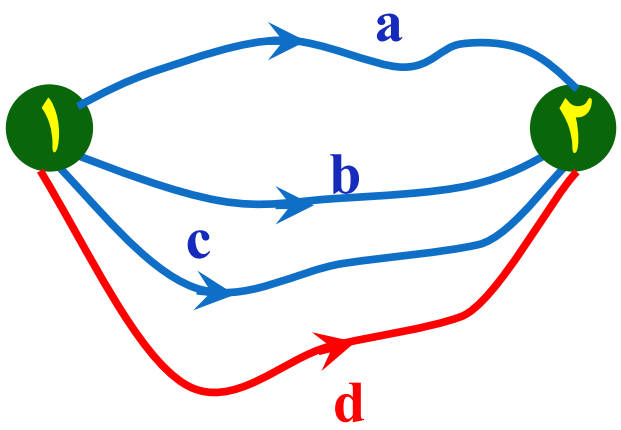
$$X = f.\Delta^T$$



مسیر k ام بین r و s

تخصیص ترافیک در شرایط تعادل:

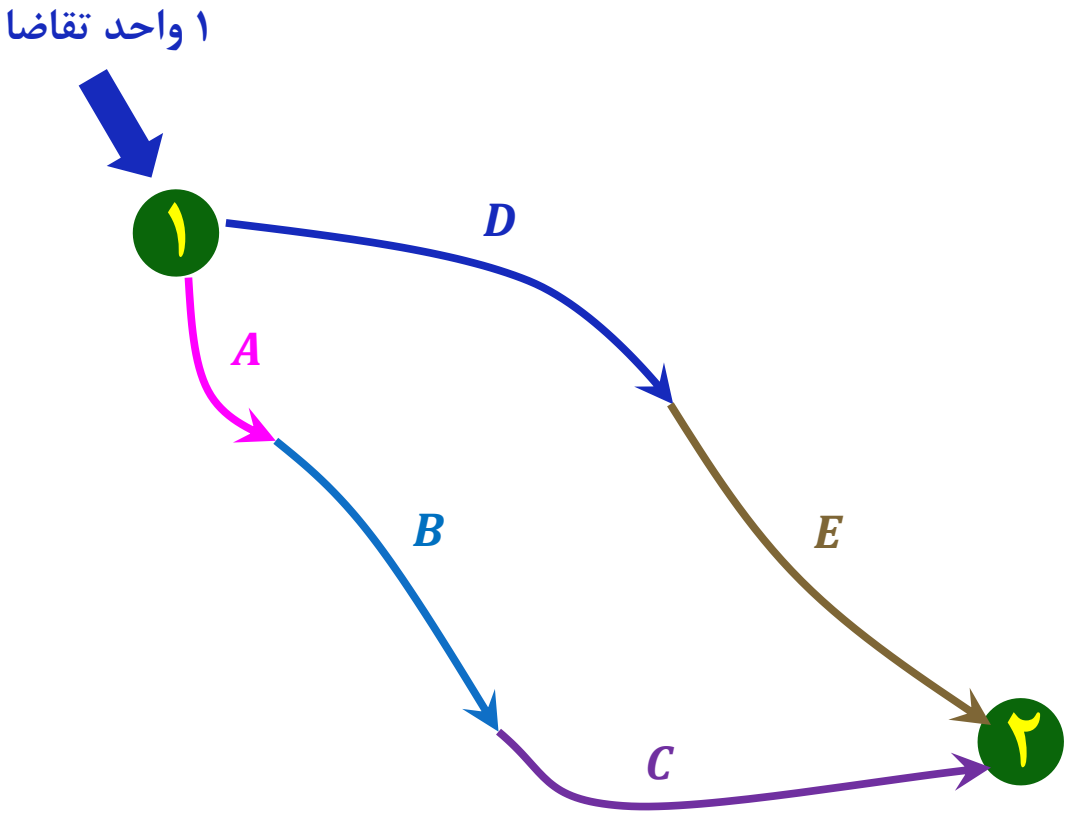
- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده شده یک OD با هم برابر است.
- ✓ زمان سفر مسیرهای استفاده نشده OD بزرگتر (یا مساوی) است.



$$t_a^* = t_b^* = t_c^* \leq t_d^*$$

۱ واحد تقاضا به کدام مسیر تخصیص یابد؟ $D-E$ یا $A-B-C$

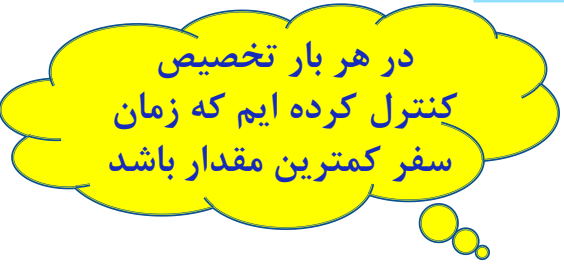
ارتباط بین زمان سفر مسیرها و زمان سفر کمانها

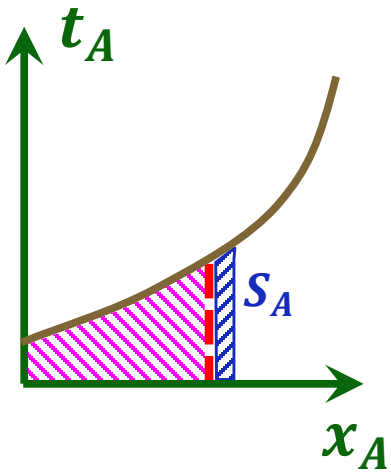


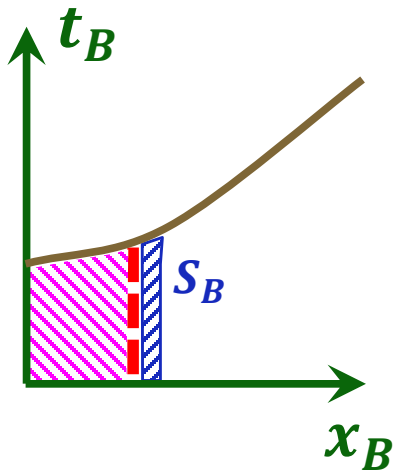
فرمول بندی مساله تخصیص

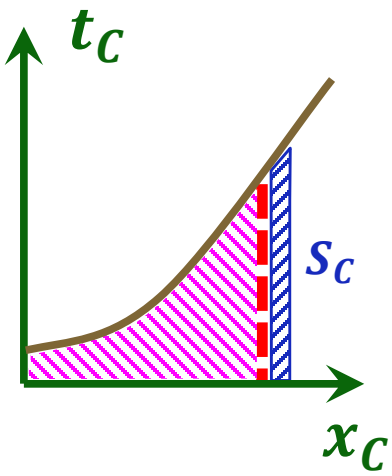
$$S_A + S_B + S_C \overset{?}{<=>} S_D + S_E$$

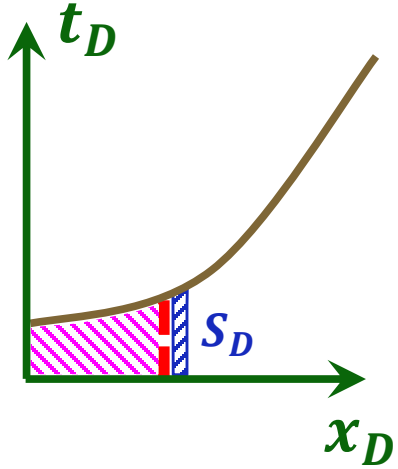
در هر بار تخصیص
کنترل کرده ایم که زمان
سفر کمترین مقدار باشد

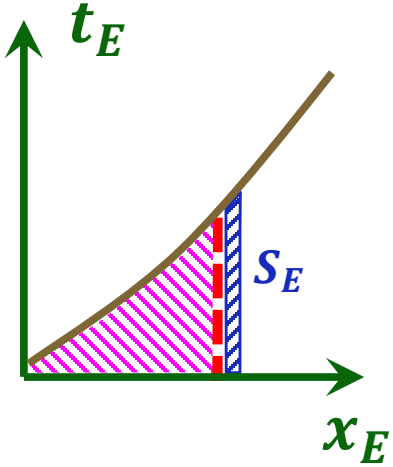


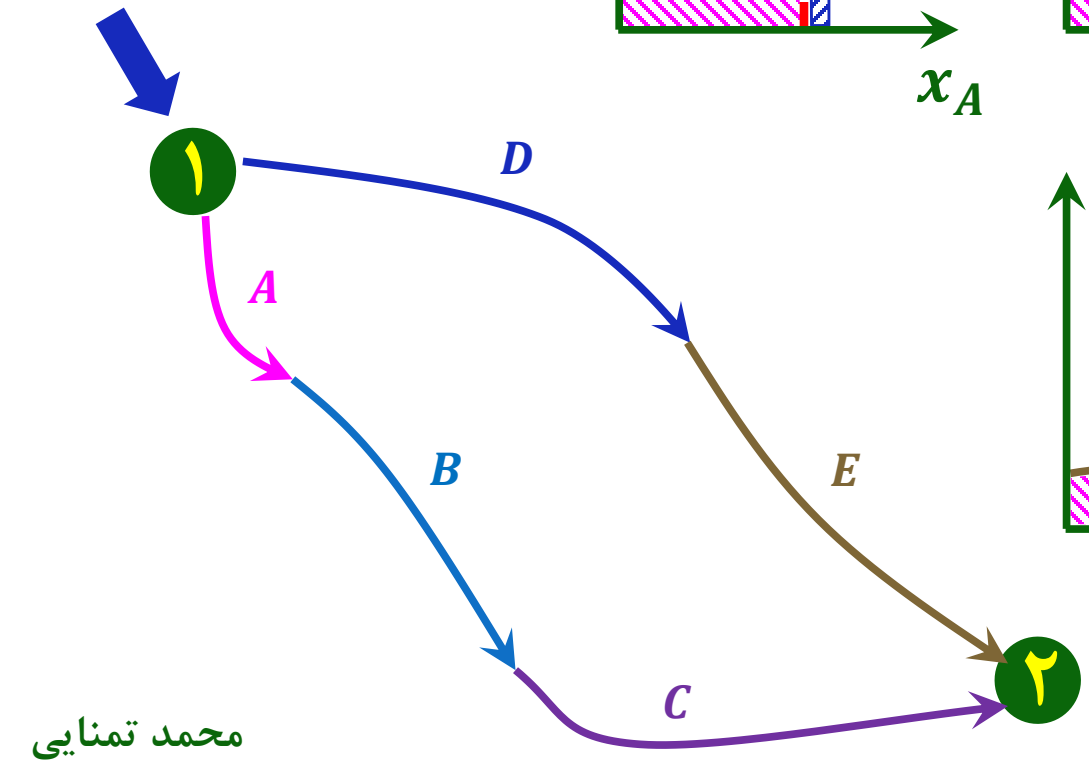










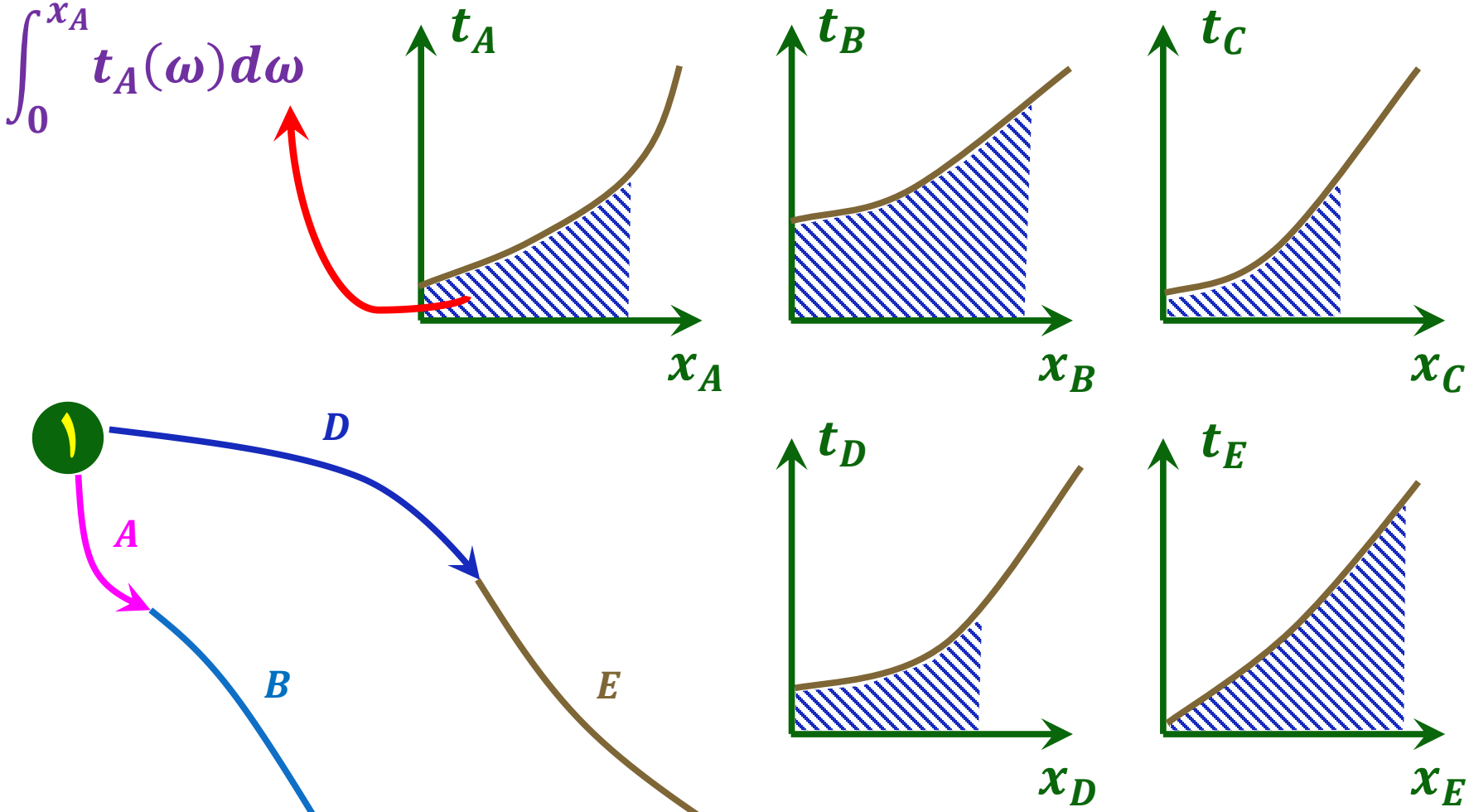


محمد تمنایی

فرمول بندی مساله تخصیص

شرایط تعادل استفاده کننده در حالتی روی می دهد که مجموع سطوح زیر نمودارهای عملکرد کمانها کمینه باشد
(مجهولات: حجم کمانها)

$$\int_0^{x_A} t_A(\omega)\,d\omega$$



محمد تمنایی

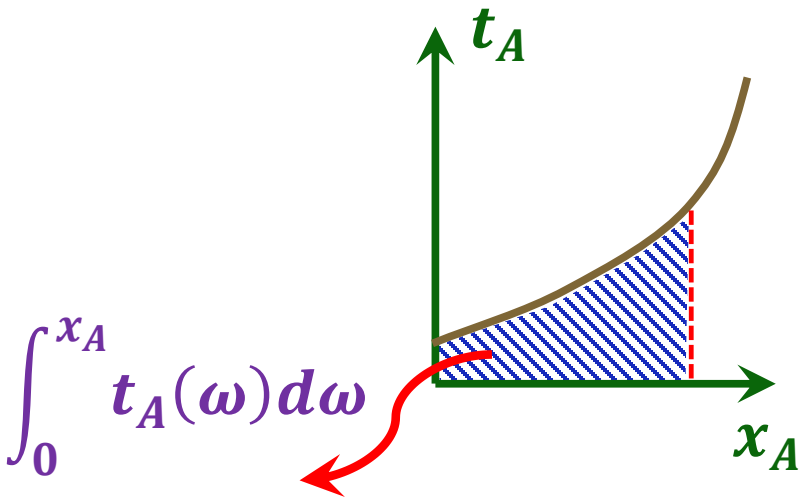
فرمول بندی مساله تخصیص

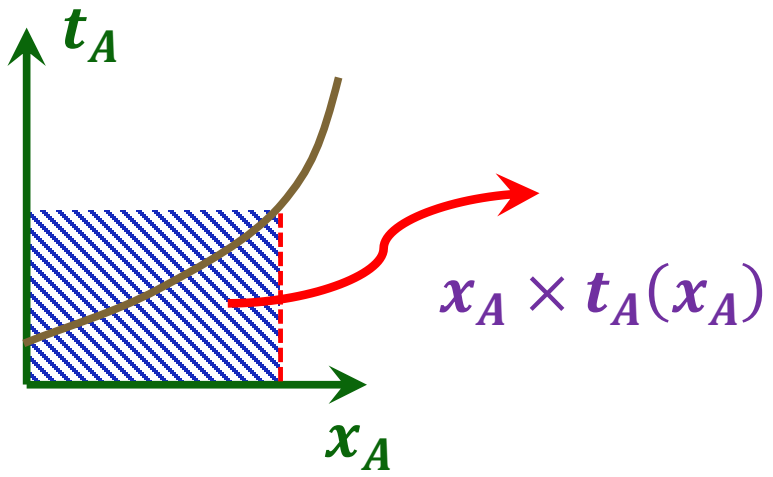
دقت: سطح زیر نمودار تفسیر شهودی ندارد.

در شرایط UE (نیز همچون هر شرایط دیگر):

مجموع زمان سفر حجم عبوری از کمان A برابر با سطح زیر نمودار ($\int_0^{x_A} t_A(\omega)d\omega$) نیست؛

بلکه برابر با $x_A \times t_A(x_A)$ است.





فرمول بندی مساله تخصیص

مسئله تخصیص ترافیک در شرایط تعادل استفاده کننده (با تقاضای ثابت):

$$Min\ Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

Beckmann Model

S.t.

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k, r, s$$

باید بررسی شود آیا شرایط تعادل را لحاظ می کند؟

?

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$ محدودیت تعریفی:

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 3)