دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

مفاهیم پایه ای در مسائل کمینه سازی

«حالات ویژه در کمینه سازی»

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

به دنبال چه هستیم؟

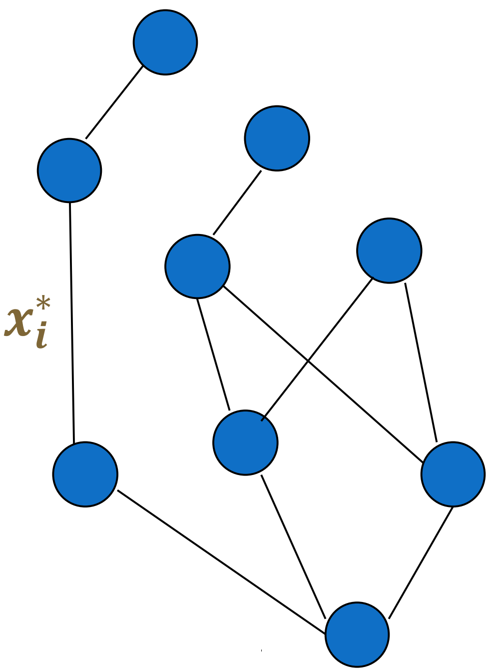
یافتن جریان در کمانها در شرایط تعادل UE

$$\boldsymbol{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

نقطه جواب کمینه جهانی

$\boldsymbol{x}_i^*$

حجم جریان در کمان $\boldsymbol{i}$ ام در شرایط تعادل



فرم استاندارد مسئله کمینه سازی

$$Min\ z(\boldsymbol{X})$$

به طوری که:

$$g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j \quad j = 1, \dots, J$$

جواب $\boldsymbol{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$

به ازای هر بردار امکانپذیر $\boldsymbol{X}$: $z(\boldsymbol{X}^*) \leq z(\boldsymbol{X})$

$$g_j(\boldsymbol{X}^*) \geq b_j\ \forall j \in (set\ of\ constraints)$$

حالات ویژه در کمینه سازی

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$

- ✓ همه محدودیتها بصورت متغیرهای نامنفی باشند.

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

- ✓ همه محدودیتها بصورت خطی و با علامت تساوی باشند.

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} x_i = b_j \quad j = 1, \dots, m$$

- ✓ همه محدودیتها بصورت خطی و با علامت تساوی و متغیرهای نامنفی باشند.

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} h_{ij} x_i = b_j \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

حالت ویژه ۱: محدودیتها = متغیرهای نامنفی

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{S.t.}$$
$$\boldsymbol{x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n}$$

تعداد $\boldsymbol{i}$ با تعداد $\boldsymbol{j}$ برابر است.

$$\boldsymbol{u_j = u_i}$$

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z(X^*)}{\partial x_i} = u_i \times 1 + 0 + \cdots + 0 = u_i & \forall i \\ u_i \geq 0 & \forall i \\ u_j[0 - x_i^*] = 0 \rightarrow u_i x_i^* = 0 & \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Z(X^*)}{\partial x_i} \geq 0 & \forall i \\ x_i^* \dfrac{\partial Z(X^*)}{\partial x_i} = 0 & \forall i \\ x_i \geq 0 & \forall i \end{cases}$$

حالت ویژه ۲: محدودیتها = خطی تساوی

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i \geq b_j \\ -\sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i \geq -b_j \end{cases}$$

$$\frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_j [\vartheta_j h_{ij} - w_j h_{ij}] = \sum_j [\vartheta_j - w_j] h_{ij} = \sum_j u_j h_{ij} \quad \forall i$$

u_j آزاد در علامت

حالات ویژه در کمینه سازی: حالت دوم

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$

S.t.

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \qquad j = 1, \dots, m$$

شرایط درجه اول بهینگی

First Order Conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_j u_j h_{ij} & \forall i \\ \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j & \forall j \\ u_j \text{ آزاد در علامت} & \end{cases}$$

حالات ویژه در کمینه سازی: حالت دوم

یافتن روابط کوهن تاکر با استفاده از «تابع لاگرانژ»

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$

$$S.t.$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \quad j = 1, \dots, m$$

برای هر محدودیت j یک ضریب لاگرانژ u_j تعریف می کنیم

(انتقال محدودیت در تابع هدف)

تابع لاگرانژ مسئله

$$L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}) = Z(\boldsymbol{X}) + \sum_{j=1}^{m} u_j\left(b_j - \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Min\ Z(\boldsymbol{X}) \\ S.t.\ \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \quad \forall j \end{array}} \equiv \boxed{\begin{array}{c} Find\ Stationary\ point\ of \\ L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}) \end{array}}$$

$$Z(\boldsymbol{X}^*) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{U}^*)$$

نقطه سکون تابع لاگرانژ: نقطه زینی است (نسبت به X کمینه و نسبت به U بیشینه).

حالات ویژه در کمینه سازی: حالت دوم

$$L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}) = Z(\boldsymbol{X}) + \sum_{j=1}^{m} u_j\left(b_j - \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i\right)$$

شرایط درجه اول بهینگی

First Order Conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X^*,U^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \\ \dfrac{\partial L(X^*,U^*)}{\partial u_j} = 0 \quad \forall j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_j u_j h_{ij} \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \quad \forall j \\ u_j \text{ آزاد در علامت} \end{cases}$$

حالت ویژه ۳: محدودیتهای خطی تساوی بعلاوه متغیرهای نامنفی

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \qquad j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) = Z(\boldsymbol{X}) + \sum_{j=1}^{m} u_j (b_j - \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i)$$

$$\boldsymbol{S.t.}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

u_j آزاد در علامت

مشابه حالت ویژه ۱

حالات ویژه در کمینه سازی: حالت سوم

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j \qquad j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) = Z(\boldsymbol{X}) + \sum_{j=1}^{m} u_j (b_j - \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i)$$

$$S.t. \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u_j} = 0 & \forall j \\ x_i \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & \forall i \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} \geq 0 & \forall i \\ x_i \geq 0 & \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} h_{ij}x_i = b_j & \forall j \\ x_i (\dfrac{\partial Z}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} u_j h_{ij}) = 0 & \forall i \\ (\dfrac{\partial Z}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} u_j h_{ij}) \geq 0 & \forall i \\ x_i \geq 0 & \forall i \end{cases}$$

u_j آزاد در علامت

$$L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}) = Z(\boldsymbol{X}) + \sum_j u_j(b_j - g_j(\boldsymbol{X}))$$

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$
$$S.t.$$
$$g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j$$

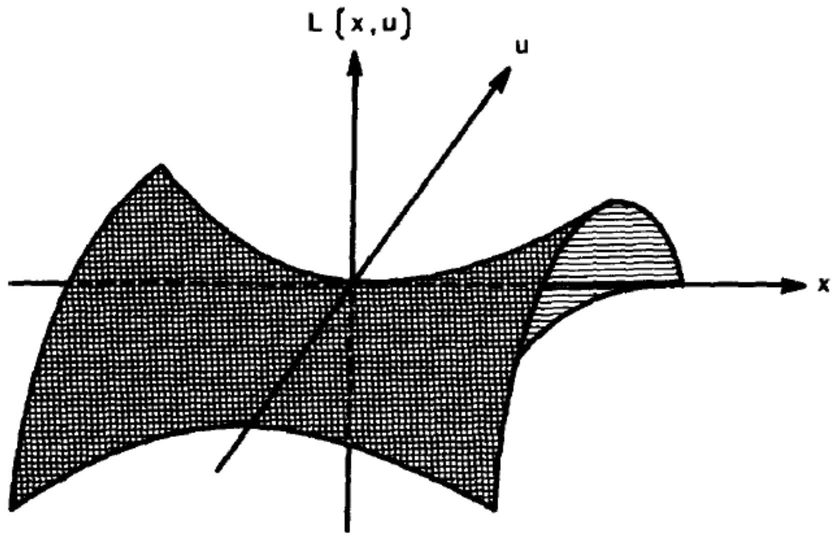


Figure 2.10 Saddle point of a two-argument function. The point (0, 0) maximizes $L(x, u)$ with respect to u and minimizes $L(x, u)$ with respect to x.

نقطه سکون لاگرانژ یک تابع محدب، در مینیمم یا ماکزیمم لاگرانژ نیست، بلکه در نقطه زینی لاگرانژ است.

نقطه $(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{U}^*)$ تابع لاگرانژ را نسبت به $\boldsymbol{X}$ مینیمم می کند و نسبت به $\boldsymbol{U}$ ماکزیمم می کند.

$$L(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{U}) \leq L(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{U}^*) \leq L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}^*)$$

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$
$$S.t.$$
$$g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j \ \ \forall j$$

$$L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}) = Z(\boldsymbol{X}) + \sum_j u_j(b_j - g_j(\boldsymbol{X}))$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Min\ Z(\boldsymbol{X}) \\ S.t.\ \ g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j \ \ \forall j \end{array}} \equiv \boxed{\begin{array}{c} Find\ Stationary\ point\ of \\ L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}) \\ S.t.\ \ u_j \geq 0 \ \ \forall j \end{array}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & \forall i \\ u_j \dfrac{\partial L}{\partial u_j} = 0 & \forall j \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_j} \leq 0 & \forall j \\ u_j \geq 0 & \forall j \end{cases}$$

کمینه سازی لاگرانژ
نسبت به x

بیشینه سازی لاگرانژ
نسبت به u

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

تمرینات انتهای فصل دوم کتاب شفی:

2.13
2.14
2.15
2.16

منابع

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 2)