دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

تحلیل سیستم های حمل و نقل

مفاهیم پایه ای در مسائل کمینه سازی

«کمینه سازی چندمتغیره»

مدرس: محمد تمنایی

بهار ۱۳۹۶

فهرست:

- ✓ کمینه سازی چند متغیره بدون محدودیت
- ✓ کمینه سازی چند متغیره با محدودیت

به دنبال چه هستیم؟

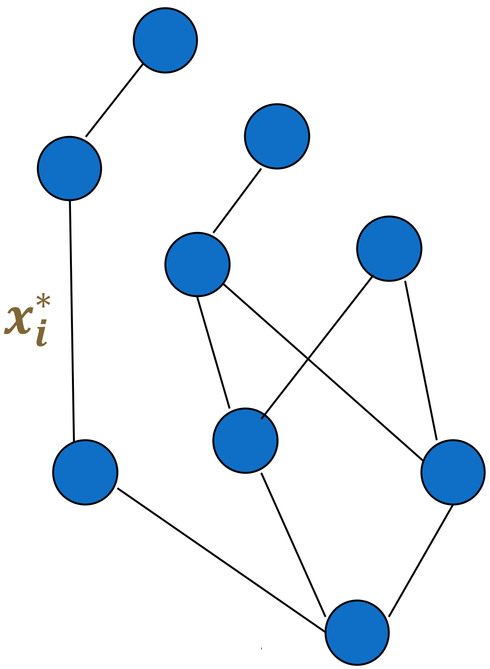
یافتن جریان در کمانها در شرایط تعادل UE

$$\boldsymbol{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

نقطه جواب کمینه جهانی

$\boldsymbol{x_i^*}$

حجم جریان در کمان $\boldsymbol{i}$ ام در شرایط تعادل



فرم استاندارد مسئله کمینه سازی

$$Min\; z(\boldsymbol{X})$$

به طوری که:

$$g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j \quad j = 1, \dots, J$$

جواب $\boldsymbol{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$

به ازای هر بردار امکانپذیر $\boldsymbol{X}$: $z(\boldsymbol{X}^*) \leq z(\boldsymbol{X})$

$$g_j(\boldsymbol{X}^*) \geq b_j \; \forall j \in (set\ of\ constraints)$$

کمینه سازی چندمتغیره بدون محدودیت

$$Min\ z(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

شرط لازم

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla Z}(\boldsymbol{X}^*)} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

$$\frac{\partial Z(X)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1,2, \dots, n$$

نقطه با مشتقات جزیی صفر = نقطه سکون (Stationary Point)

شرایط درجه دوم بهینگی
Second Order Conditions

شرط کافی

- تابع در X^* اکیداً محدب باشد.
- تابع در سایر نقاط، محدب باشد.

اکیداً محدب

تعریف ۱	خط واصل دو نقطه، بالای تابع	$Z[\theta X' + (1-\theta)X''] < \theta\, Z(X') + (1-\theta)\, Z(X'')$
تعریف ۲	تقریب خطی، زیر تابع	$Z(X') + \overrightarrow{\nabla Z(X')}.\,\overrightarrow{(X''-X')}^T < Z(X'')$
تعریف ۳	ماتریس هشین مثبت قطعی	*Hessian* $\nabla^2 Z(x)$ *is positive definite*

ماتریس هشین Hessian Matrix

H

$$\nabla^2 Z(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z(X)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

ماتریس H مثبت قطعی: $\vec{h}.H.\vec{h^T} > 0 \quad \forall \vec{h} \neq \vec{0}$

- ✓ اگر ماتریس هشین Z در نقطه سکون X^* مثبت قطعی باشد، نقطه X^* کمینه محلی است.
- ✓ اگر Z در سایر نقاط نیز محدب (ماتریس هشین مثبت نیمه قطعی) باشد، نقطه X^* کمینه جهانی است.

مثال: نقطه کمینه جهانی تابع؟

$$Min\ Z(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2$$

شرایط درجه اول بهینگی:

$$\overrightarrow{\nabla Z(x_1, x_2)} = [(2x_1 + 2x_2 - 2), (4x_2 + 2x_1 - 4)]$$

$$\overrightarrow{\nabla Z(X^*)} = \vec{0} \rightarrow \begin{Bmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\ 4x_2 + 2x_1 - 4 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$$

مثال: نقطه کمینه جهانی تابع؟

$$Min\, Z(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2$$

شرایط درجه دوم بهینگی:

$$\nabla^2 Z(.) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{h} = (x_1, x_2) \neq (0,0)$$

$$\vec{h}.\nabla^2 Z(.).\overrightarrow{h^T} = (x_1, x_2).\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2(x_1 + x_2)^2 + 2(x_2)^2 > 0$$

تابع در نقطه $(0,1)$ اکیداً محدب است.
تابع در سایر نقاط اکیداً محدب (در نقطه $(0,0)$ محدب) است.
پس نقطه $(0,1)$ نقطه کمینه جهانی است.

$$Min\, Z(x_1, x_2) = Z(0,1) = -2$$

مفاهیم پایه ای در کمینه سازی

$$Min\ Z(x_1,x_2) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2$$

$$\nabla Z(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2}\right) = \big((2x_1+2x_2-2),(4x_2+2x_1-4)\big) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad X^* = (0,1)$$

شرط لازم برای مینیمم بودن:

شرط کافی برای اینکه X^* مینیمم باشد:

الف) $\underbrace{Z(\theta X + (1-\theta)Y)}_{\cancel{\theta(x_1,x_2)}(\theta(x_1)+(1-\theta)(y_1),\ \theta x_2+(1-\theta)y_2)} < \theta Z(X) + (1-\theta)Z(Y)$, $0<\theta<1$; $Z(Y) \to Z(y_1,y_2)$

$$\to (\theta x_1+(1-\theta)y_1)^2 + 2(\theta x_2+(1-\theta)y_2)^2 + 2(\theta x_1+(1-\theta)y_1)(\theta x_2+(1-\theta)y_2) - 2(\theta x_1+(1-\theta)y_1) - 4(\theta x_2+(1-\theta)y_2) \overset{\text{باید}}{<}$$

$$\theta({x_1}^2+2{x_2}^2+2x_1x_2-2x_1-4x_2) + (1-\theta)({y_1}^2+2{y_2}^2+2y_1y_2-2y_1-4y_2) \Longrightarrow \underbrace{(\theta^2-\theta)}_{<0 \text{ چون } 0<\theta<1}\underbrace{\left\{[(x_1+x_2)-(y_1+y_2)]^2+{x_2}^2+{y_2}^2\right\}}_{>0} < 0 \ \checkmark$$

ب) $Z(X) + \nabla Z(X)(Y-X)^T < Z(Y)$

$$\to Z(x_1,x_2) + \left[\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2}\right]\begin{bmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \end{bmatrix} \overset{\text{باید}}{<} Z(y_1,y_2) \xrightarrow{\cdots} [(y_1-x_1)+(y_2-x_2)]^2 + (y_2-x_2)^2 > 0 \ \checkmark$$

۱) ماتریس هسین $Z(x)$ مثبت قطعی باشد $\longleftrightarrow$ «قضیه» برای هر بردار $h \neq 0$: $h.\nabla^2 Z(x).h^T > 0 \Rightarrow$ $\nabla^2 Z(x)$ مثبت قطعی است

$$\nabla^2 Z(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} ,\ h = (x_1,x_2) \Rightarrow (x_1,x_2)\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{\text{باید}}{>} 0 \Rightarrow 2(x_1+x_2)^2 + 2{x_2}^2 > 0 \ \checkmark$$

۲) ماتریس هسین $Z(x)$ مثبت قطعی باشد $\longleftrightarrow$ مقادیر ویژه این ماتریس مثبت باشند (Eigen Values)

یادآوری: $AX = \lambda X \longrightarrow (A-\lambda I)X = 0$ $\begin{cases} X = 0 & \text{جواب بدیهی} \\ A-\lambda I = 0 \longrightarrow |A-\lambda I| = 0 \end{cases}$

$$\nabla^2 Z(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^2 Z(x) - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\to \begin{cases} \lambda = 5.2 > 0 \\ \lambda = 0.8 > 0 \end{cases} \to \nabla^2 Z \text{ مثبت قطعی}$$

۳) ماتریس هسین $Z(x)$ مثبت قطعی باشد $\longleftrightarrow$ دترمینان leading Principal Minor مثبت باشند (دترمینان ماتریس‌های مربعی که از گوشه بالا سمت چپ شروع می‌شوند)

$$\nabla^2 Z(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{First leading Minor determinant} = 2 > 0 \\ \text{2nd leading Minor determinant} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8-4 = 4 > 0 \end{array}\right\} \nabla^2 Z \text{ مثبت قطعی} \ \checkmark$$

کمینه سازی چندمتغیره با محدودیت

$$Min\ z(\boldsymbol{X})$$

$$S.t.$$

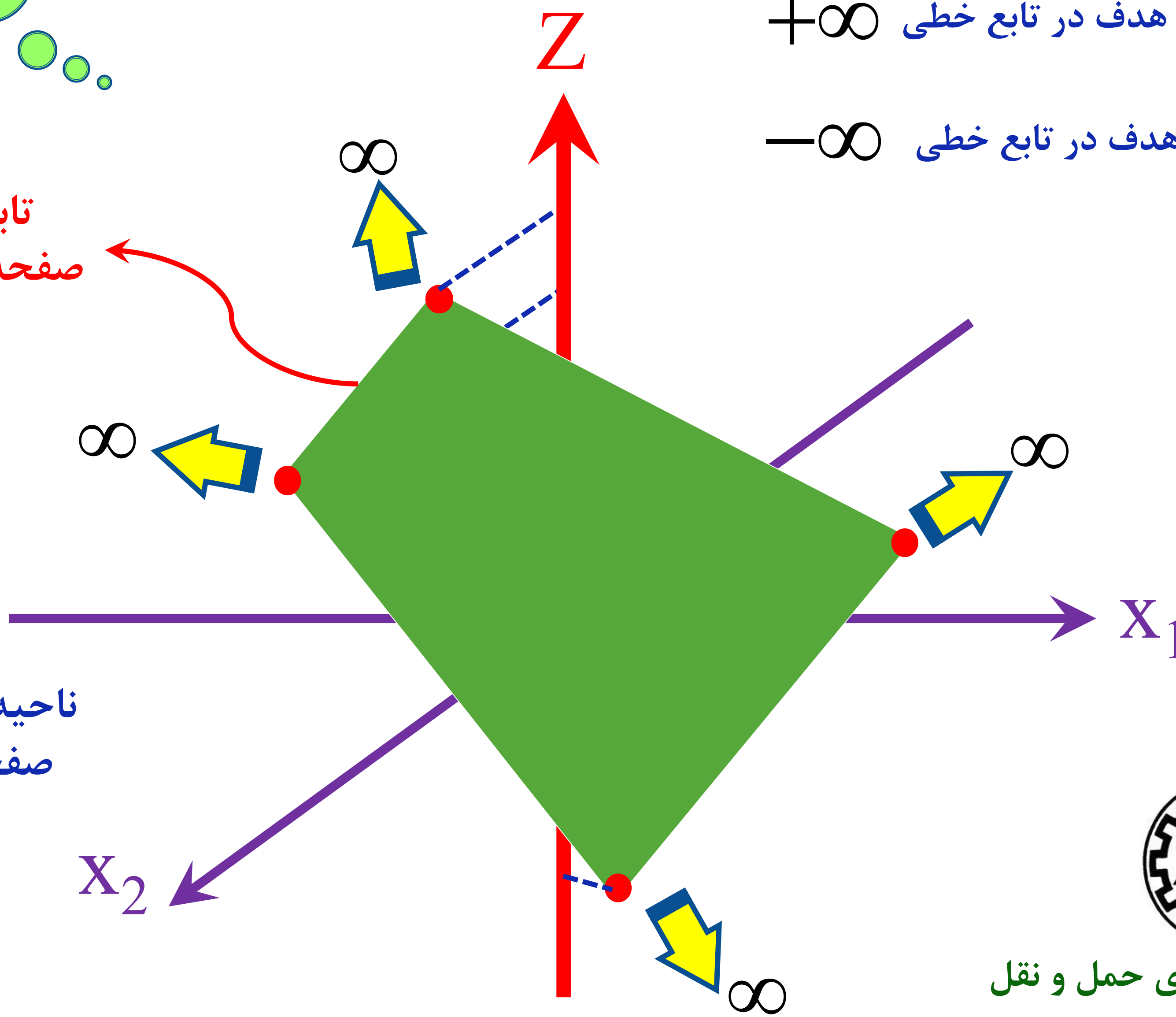
$$g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j \quad \forall j$$

مسئله ۲بعدی

در حالتی که هیچ محدودیتی در فضای امکانپذیر نداشته باشیم:

بیشترین مقدار هدف در تابع خطی $+\infty$

کمترین مقدار هدف در تابع خطی $-\infty$



تابع هدف، یک صفحه (Plane) است

ناحیه امکانپذیر:
صفحه x_1x_2

مسئله nبعدی

مسئله n متغیره

به ازای هر ۱ متغیر ۱ بعد به مسئله اضافه می شود

ناحیه امکانپذیر یک ابرصفحه (Hyper Plane) در n بعد است

مسئله ۲بعدی

در حالت وجود محدودیت در فضای امکانپذیر:

مقدار بهینه (Optimal Value) (احتمالاً) محدود است.

- ✓ محدودیت نامساوی: یک نیم فضا (half space) است.
- ✓ محدودیت تساوی: یک صفحه (Plane) است.

مسئله
۲بعدی خطی

محدودیت ها

$x_1 \geq 0$ نیم فضا

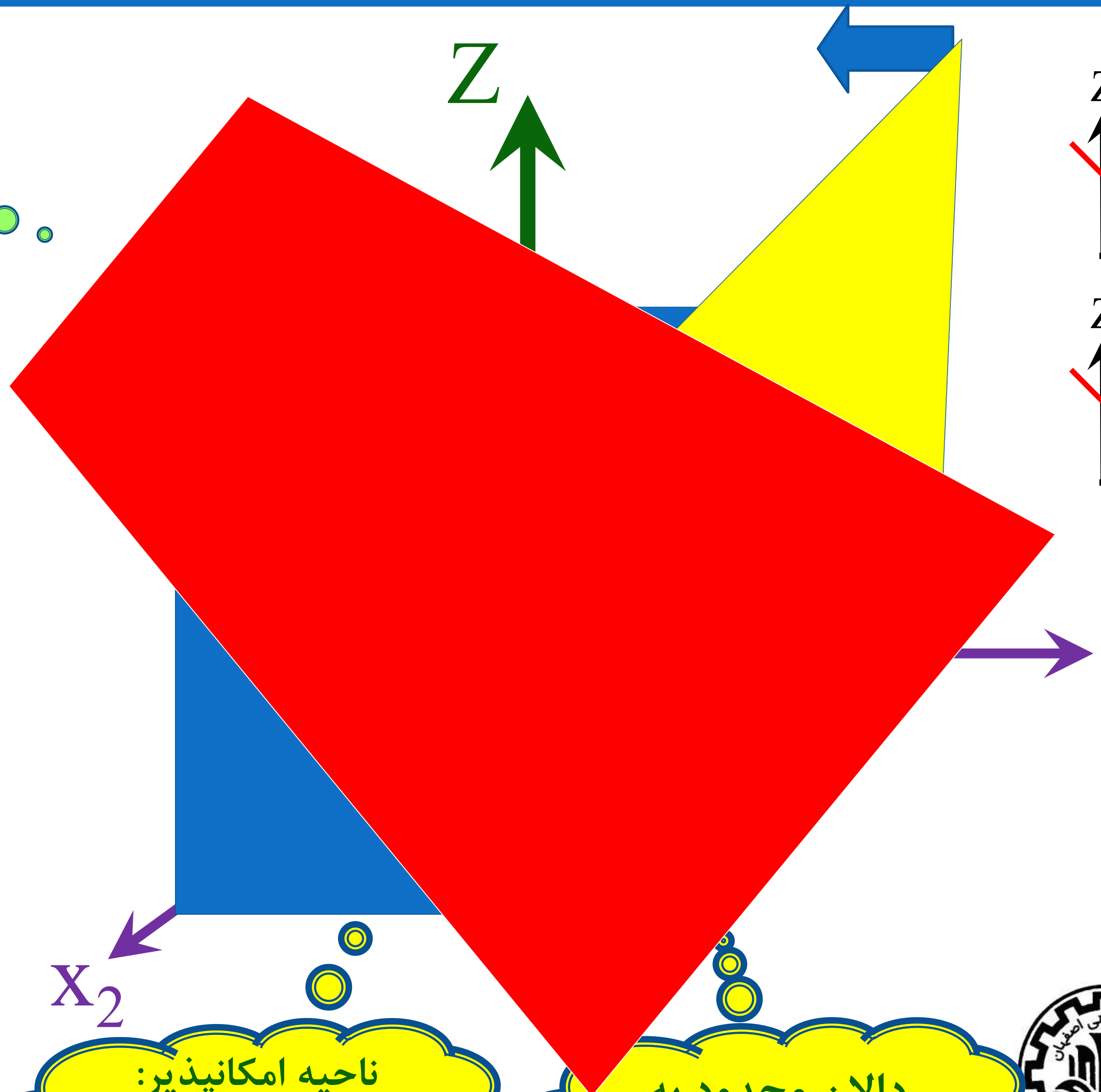
$x_2 \geq 0$ نیم فضا

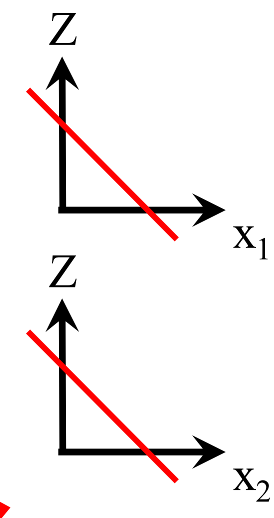
$x_1 \leq 2$ نیم فضا

$x_2 \leq 3$ نیم فضا

تابع هدف

$$Max \;\; 5 - x_1 - x_2$$





ناحیه امکانپذیر:
نقاط صفحه x_1 x_2
محدود به ۴ خط

دالان محدود به
۴ صفحه (Plane)

تصویر بر روی صفحه x_1x_2

مسئله ۲بعدی خطی

محدودیت ها

$x_1 \geq 0$ نیم فضا

$x_2 \geq 0$ نیم فضا

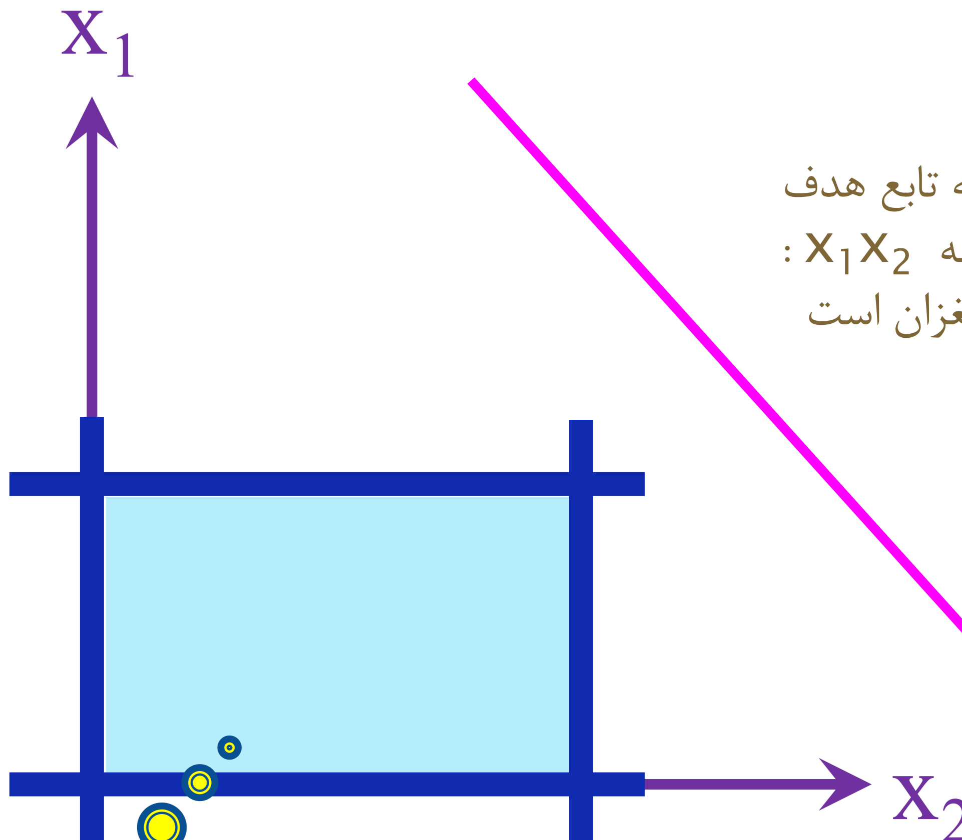
$x_1 \leq 2$ نیم فضا

$x_2 \leq 3$ نیم فضا

تابع هدف

$$Max \;\; 5 - x_1 - x_2$$

صفحه



تصویر صفحه تابع هدف
بر روی صفحه x_1x_2 :
یک خط لغزان است

ناحیه امکانپذیر:
نقاط صفحه x_1 x_2
محدود به ۴ خط

حین حرکت خط لغزان،
مقدار هدف در حال تغییر است
(مقدار Z در حال افزایش)

مفاهیم پایه ای در کمینه سازی

کمینه سازی چندمتغیره با محدودیت

مسئله ۲بعدی خطی

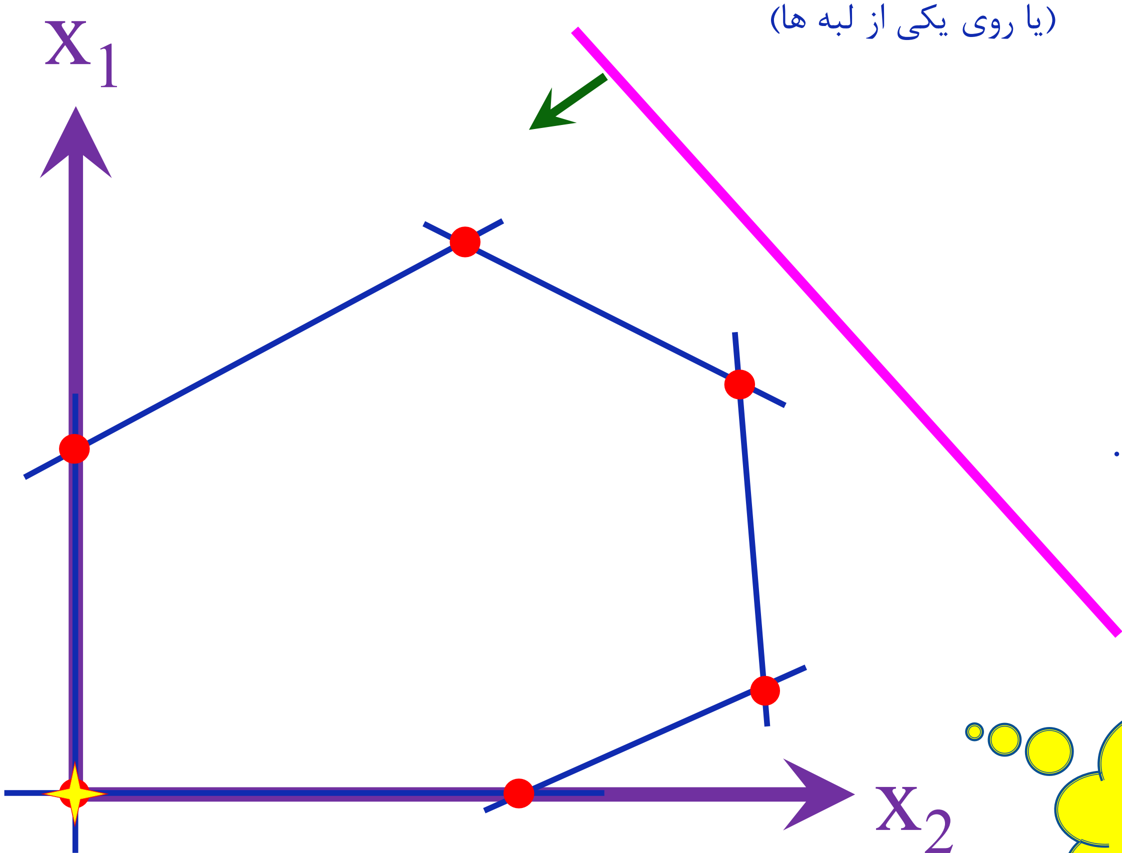
تابع هدف خطی

(یکنوا صعودی یا نزولی)

محدودیتها خطی

جواب بهینه قطعاً روی یکی از گوشه های ناحیه امکانپذیر است

(یا روی یکی از لبه ها)



$$Max\ \ 5 - x_1 - x_2$$

برای یافتن جواب بهینه:

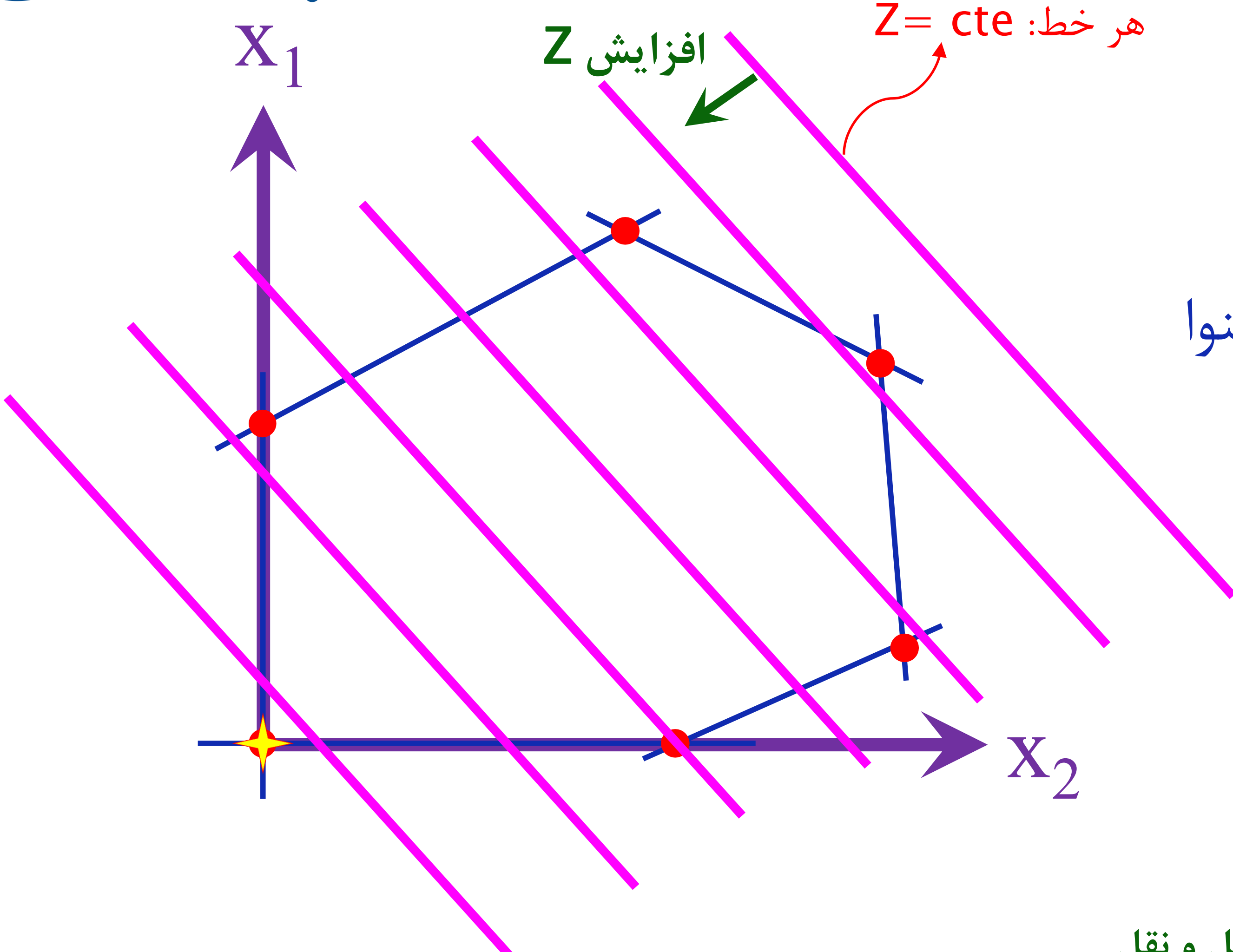
خط (تصویر صفحه تابع هدف)

را بر روی صفحه $X_1\ X_2$ حرکت می دهیم.

۱ جواب بهینه داریم

مسئله
۲بعدی خطی

$$Max\ \ 5 - x_1 - x_2$$

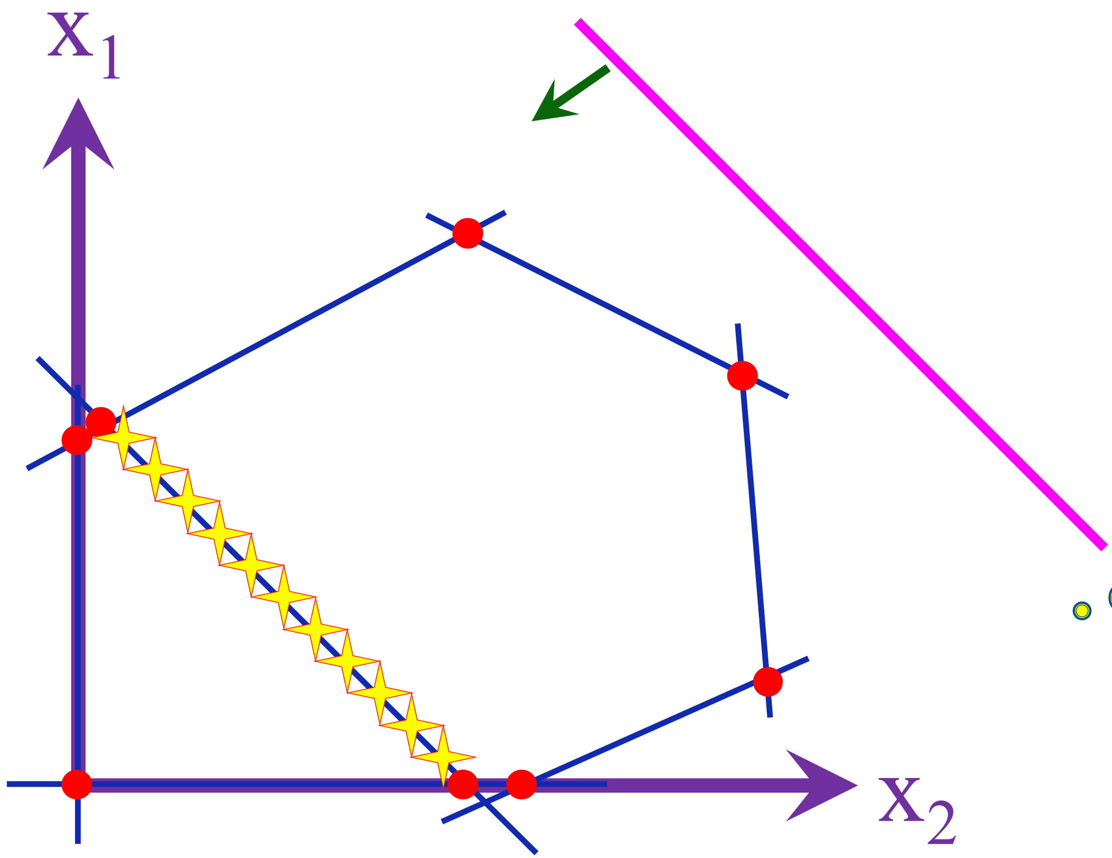


تابع هدف یکنوا

مسئله
۲بعدی خطی

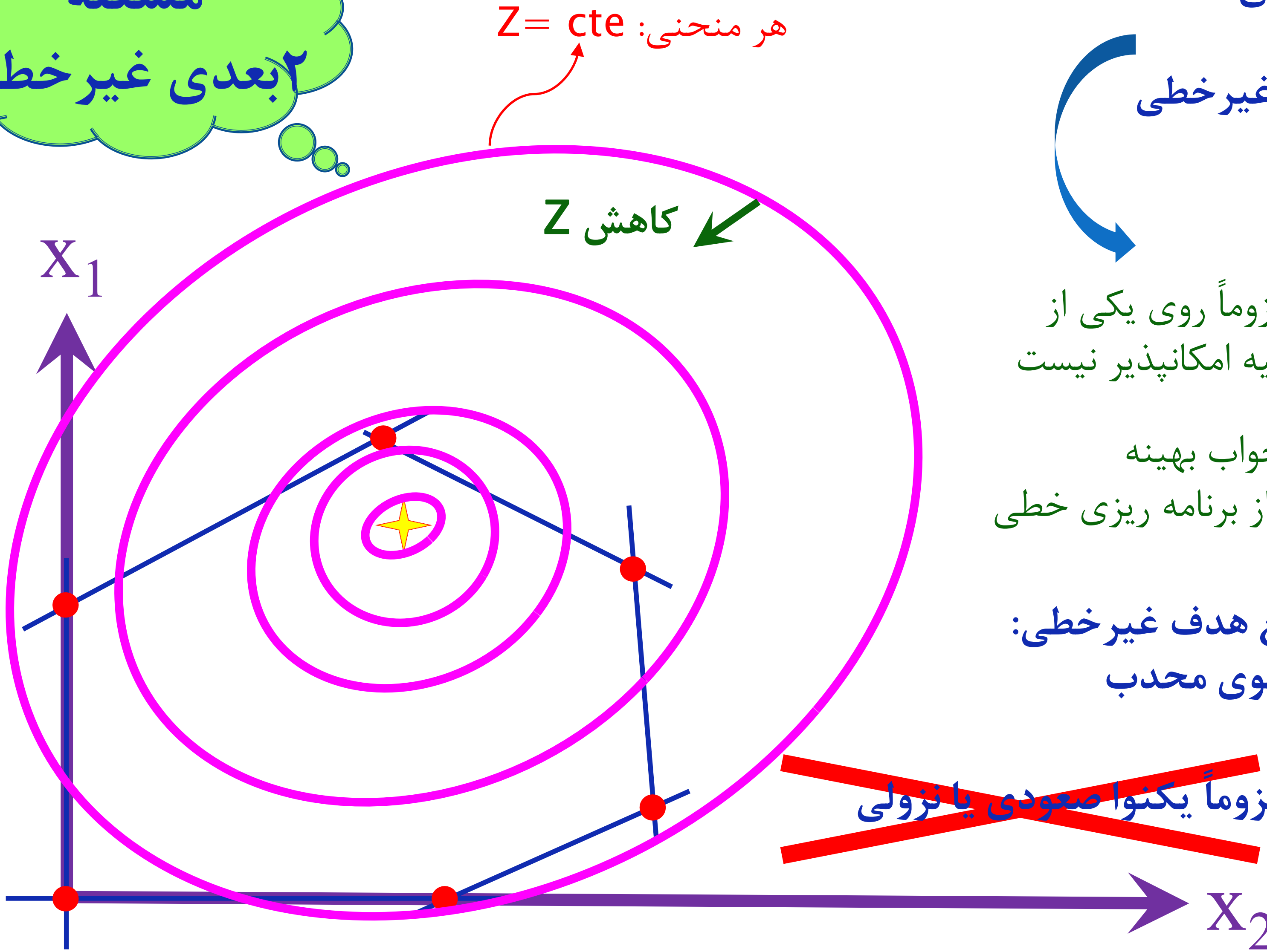
یکی از محدودیتها
در صفحه x_1 x_2
موازی با تابع هدف

بینهایت جواب بهینه داریم



∞ جواب
بهینه داریم

مسئله
۲بعدی غیرخطی



تابع هدف غیرخطی
یا
برخی محدودیتها غیرخطی

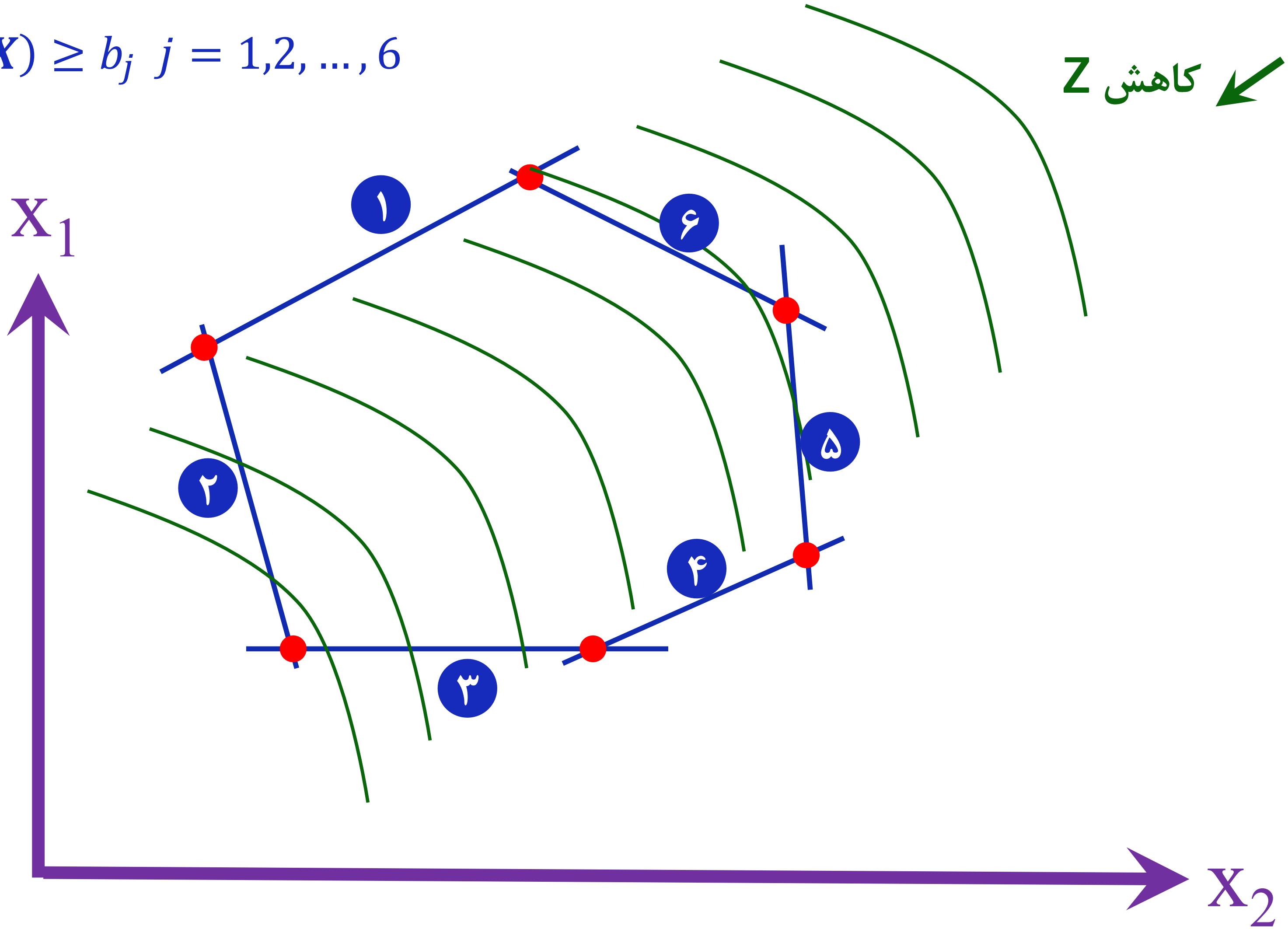
جواب بهینه لزوماً روی یکی از
گوشه های ناحیه امکانپذیر نیست

یافتن جواب بهینه
بسیار مشکل تر از برنامه ریزی خطی

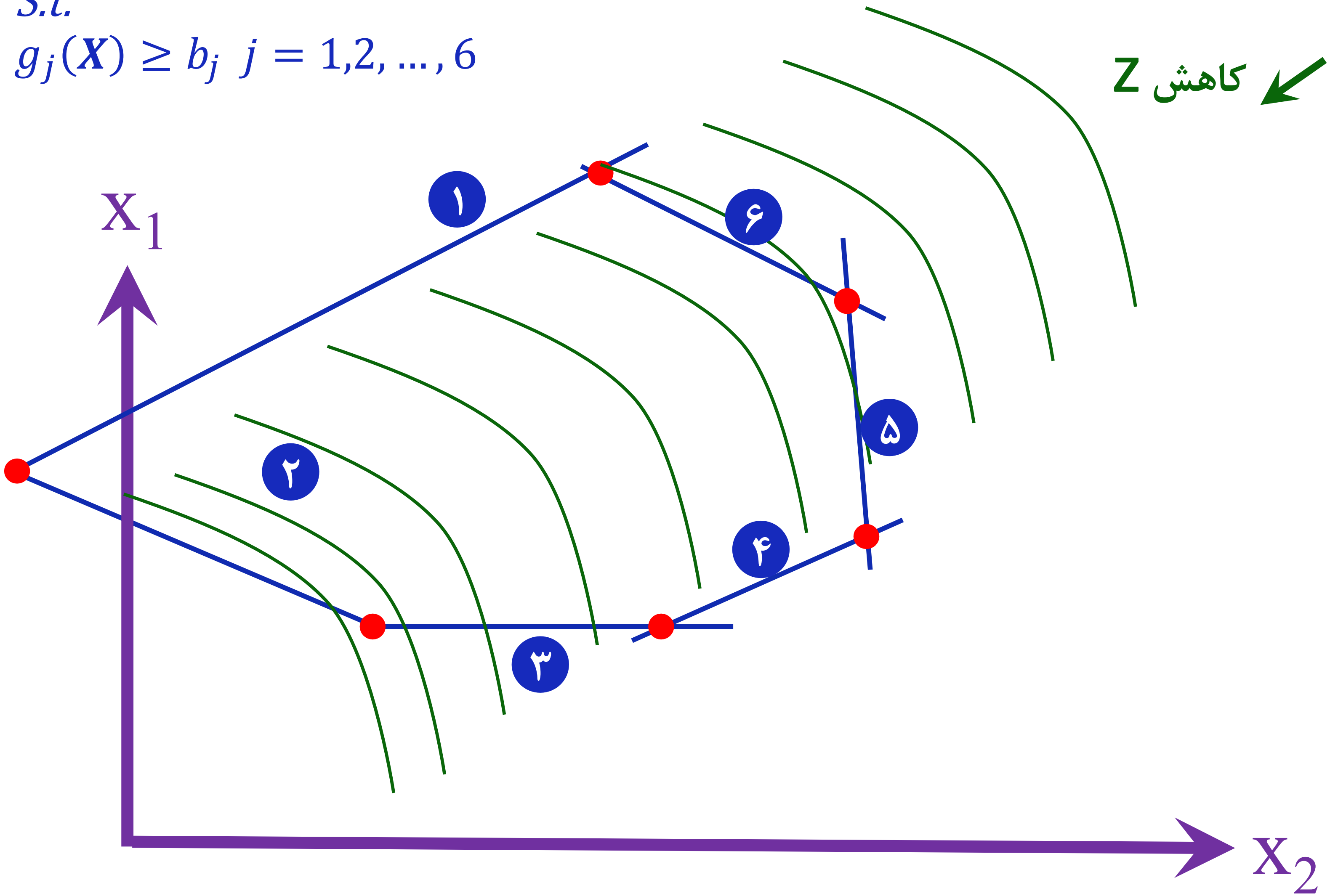
مثال) تابع هدف غیرخطی:
رویه سهموی محدب

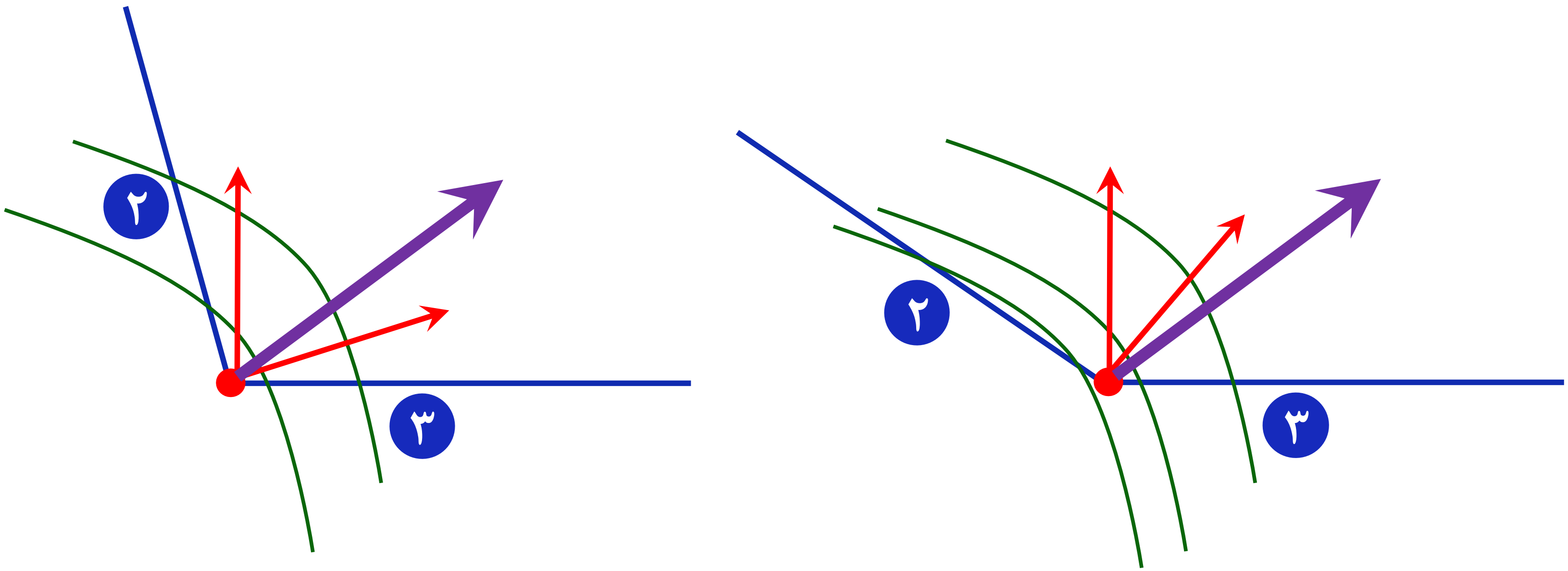
~~لزوماً یکنوا صعودی یا نزولی~~

$$Min\ Z(\boldsymbol{X})$$
$$S.t.$$
$$g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j \quad j = 1,2,\dots,6$$



$Min\ Z(\boldsymbol{X})$
$S.t.$
$g_j(\boldsymbol{X}) \geq b_j \quad j = 1,2, \dots, 6$





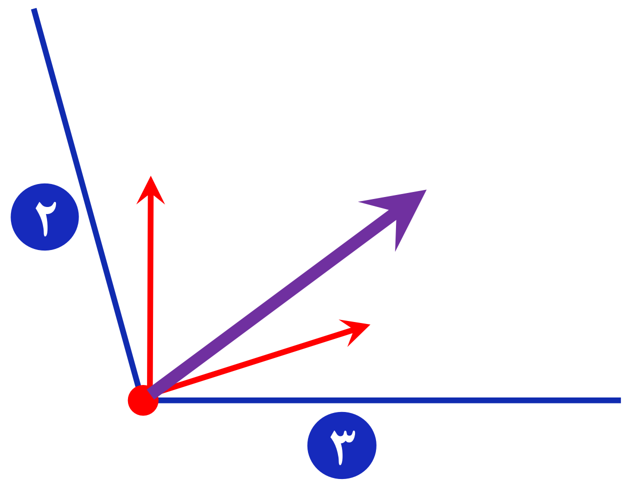
اگر جواب کمینه در تقاطع محدودیتهای g_2 و g_3 باشد، حتماً در این نقطه، ∇Z بین ∇g_2 و ∇g_3 است.

در تقاطع محدودیتهای g_2 و g_3 ، ∇Z بین ∇g_2 و ∇g_3 نیست: آن نقطه کمینه نیست (همچنان میتوان Z را کاهش داد).

تعمیم «هم علامتی» در نقطه کمینه

در نقطه کمینه

بردار $\overrightarrow{\nabla Z(X^*)}$ در بین بردارهای گرادیان محدودیتهای محدودکننده قرار می گیرد.



$$\overrightarrow{\nabla Z(X^*)} = u_2 \overrightarrow{\nabla g_2(X^*)} + u_3 \overrightarrow{\nabla g_3(X^*)}$$

$$\overrightarrow{\nabla g(X^*)} = \left(\frac{\partial g(X^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(X^*)}{\partial x_2}\right)$$

شرایط درجه اول بهینگی
First Order Conditions

شروط لازم

شروط کوهن تاکر
Kuhn-Tucker Conditions

در نقطه کمینه

$$\frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_j u_j \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} \qquad \forall i$$

به تعداد متغیرهای تصمیم

$$u_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$u_j\left[b_j - g_j(X^*)\right] = 0 \qquad \forall j$$

به تعداد محدودیتها

$$g_j(X^*) \geq b_j \qquad \forall j$$

شرایط درجه دوم بهینگی
Second Order Conditions

شرط کافی

تابع در X^* اکیداً محدب باشد.

تابع در سایر نقاط، محدب باشد.

ناحیه امکانپذیر محدب باشد.

ناحیه متشکل از محدودیتهای خطی: Convex

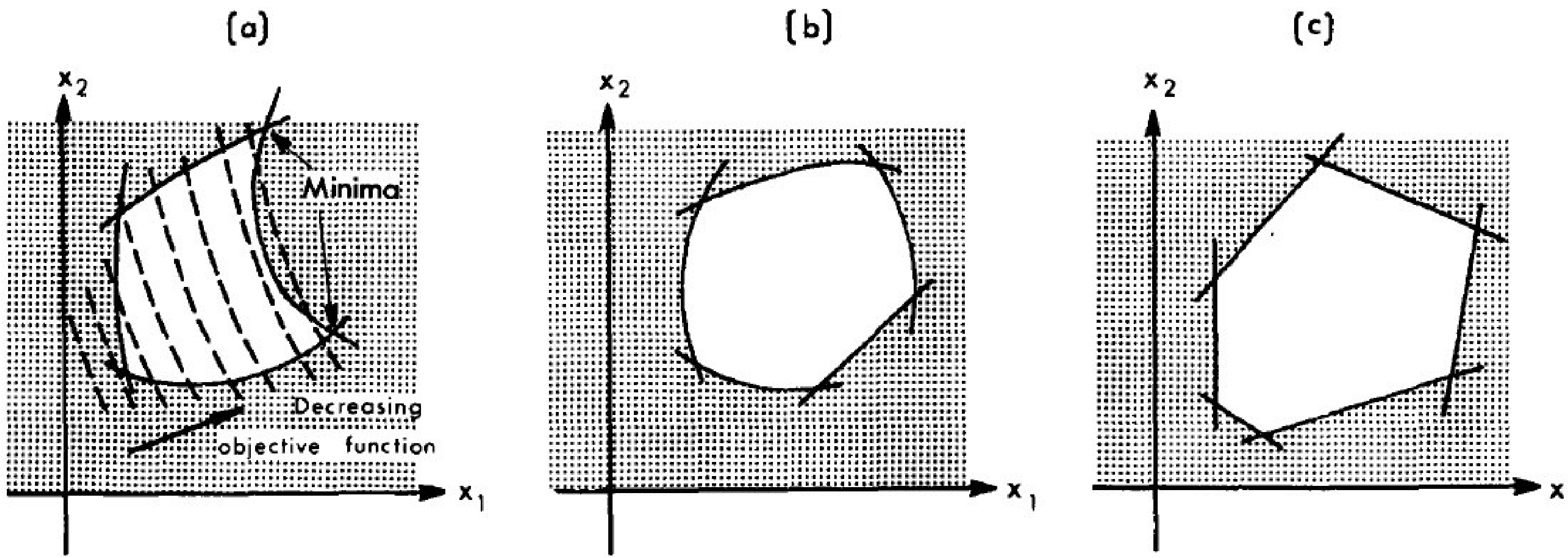


Figure 2.8 Shape of the feasible region: (a) nonconvex feasible region—two local minima are illustrated; (b) convex feasible region; (c) convex feasible region with linear constraints.

مثال: نقطه کمینه جهانی تابع؟

$$Min\ Z(x_1,x_2) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2$$

$S.t.$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

شرایط درجه اول بهینگی:

$$\frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_j u_j \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} \qquad \forall i$$

$$u_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$u_j[b_j - g_j(X^*)] = 0 \qquad \forall j$$

$$g_j(X^*) \geq b_j \qquad \forall j$$

$$\overrightarrow{\nabla Z(x_1,x_2)} = [(2x_1 + 2x_2 - 2), (4x_2 + 2x_1 - 4)]$$

$$2{x_1}^* + 2{x_2}^* - 2 = u$$

$$4{x_2}^* + 2{x_1}^* - 4 = u$$

$$u(2 - {x_1}^* - {x_2}^*) = 0$$

$${x_1}^* + {x_2}^* \geq 2$$

$$u \geq 0$$

$$u = 0 \rightarrow X^* = (0,1) \quad \text{✗}$$

$$u > 0 \rightarrow \begin{cases} u^* = 2 \\ X^* = (1,1) \end{cases}$$

$$Z(1,1) = -1 > Z(0,1) = -2$$

مثال: نقطه کمینه جهانی تابع؟

$$Min\ Z(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2$$

$S.t.$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

شرایط درجه دوم بهینگی:

$$\nabla^2 Z(.) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{h} = (x_1, x_2) \neq (0,0)$$

$$\vec{h}.\nabla^2 Z(.).\overrightarrow{h^T} = (x_1, x_2).\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2(x_1 + x_2)^2 + 2(x_2)^2 > 0$$

- ✓ تابع در نقطه سکون $(1,1)$ اکیداً محدب است.
- ✓ تابع در سایر نقاط، شرط محدب بودن را دارد.
- ✓ محدودیت خطی است، ناحیه امکانپذیر محدب است.

پس نقطه $(1,1)$ نقطه کمینه جهانی است.

منابع

Sheffi Y (1985), Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, New Jersey. (Chapter 2)